

# Elméleti mechanika A

Kapás Kornél

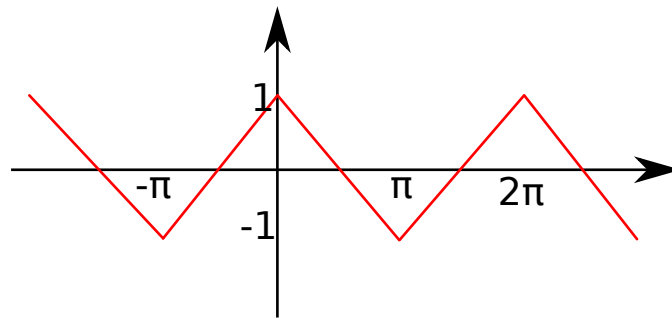
## 1. Beadandó

1.1. **Feladat.** Számoljuk ki az alábbi integrált Reziduum-tétel segítségével:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2 + 5}{(x^2 + 1) \cdot (x^2 + 4)} dx$$

(Tipp: először bontsuk parciálisan törtekre az integrandust, majd tagonként integráljunk!)

1.2. **Feladat.** Adjuk meg a háromszög jel Fourier sorát!



1.3. **Feladat.** Adjuk meg az alábbi funkcionált extremalizáló függvényt:

$$S = \int_0^1 y(x)^2 y'(x)^2 dx \quad (1)$$

- 1.) A megfelelő egyenletek felírása előtt mondjuk meg, hogy mi az ami biztosan egy globális szélsőértéke a funkcionálnak!
- 2.) Írjuk fel az Euler-Lagrange egyenletet, majd oldjuk is meg! (Tipp: egy ponton érdemes használni a  $z = y^2$  változócserét)
- 3.) Oldjuk meg a problémát a kanonikus energia megmaradását felhasználva is!

1.4. **Feladat.** Adott az alábbi Lagrange függvény:

$$L = (y'(x) - f(x, y))^2$$

ahol  $f$  tetszőleges sima függvény. Írjuk fel a kanonikus energiát és a kanonikus impulzust! Milyen esetben lesznek ezek konstans mennyiségek?

1.1. **Emelt szintű feladat.** Egy forgó korongról nézve milyen pályán halad egy egyenes vonalú egyenletes mozgást végző test?

- 1.) Írjuk fel az  $x$  és  $y$  koordinátákra vonatkozó csatolt differenciálegyenlet rendszert!
- 2.) Oldjuk meg ezeket az egyenleteket standard differenciálegyenlet megoldási módszerekkel!

3.) Megfelelő peremfeltétel illesztéssel adjuk meg azt a megoldást, ahol a pálya egyszer saját magát metszi!

**1.2. Emelt szintű feladat.** Oldjuk meg a Dido királynő problémáját úgy, hogy extremalizálandó funkcionál a két végpont közti szakasz és maga a görbe által körbeölelt terület legyen!

1.) Definiáljuk az  $x - y$  síkon körbeölelt területet az alábbi módon:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} (\mathbf{r} \times d\mathbf{r})_z \quad (2)$$

ahol a  $z$  index egy vektor harmadik komponensét jelöli, míg  $\mathbf{r} = (x, y, z)$

2.) Használjunk egy tetszőleges  $\mathbf{r}(t)$  paraméterezést! Írjuk fel ezzel a teljes variációs problémát, ami tartalmazza a kényert, miszerint a görbe két végpontja közti teljes hossza  $l$ !

3.) Adjuk meg az  $S$ -et extremalizáló  $\mathbf{r}(t)$  görbét! Ellenőrzés gyanánt írjuk vissza a kapott alakot, hogy valóban a kívánt területet kapjuk-e!