Elméleti mechanika A

Kapás Kornél

3. Beadandó

3.1. Feladat. *Legyen a potenciálaz alábbi:*

$$V(r) = \alpha \ln(r/a) \tag{1}$$

Létrejöhet-e körpálya? Ha igen, akkor stabil-e? Ehhez:

a.) *Írjuk fel a csak r-től függő effektív potenciált. Ha ennek van egy r_0 szélsőértéke, akkor megvalósulat ilyen sugarú körpálya. Mekkora ez az r_0?*

b.) *Ha az effektív potenciál szélsőértéke minimum (második derivált pozitív), akkor a körpálya stabil. Itt mi a helyzet?*

3.2. Feladat. *Adott az alábbi potenciál:*

$$V(r) = V_0 \frac{r^n}{a^n} \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

a.) *Írjuk fel az effektív potenciált, majd adjuk meg a lehetséges körpálya sugarát!*

b.) *Számoljuk ki a körpályától eltérő kis rezések frekvenciáját (ω)! Hogyan aránylik ez a teljes körbemenetel frekvenciájához (ω_0)?*

3.3. Feladat. *Számoljuk ki az $f(t)$-vel* ***súrlódó*** *gerjesztett oszcillátor időfüggését, ahol*

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad t < 0 \\ f_0/\tau, & \text{ha} \quad 0 < t < \tau \\ 0, & \text{ha} \quad \tau < t \end{cases} \tag{3}$$

Legyen kezdetben nyugalomban az oszcillátor!

3.4. Feladat. *Számoljuk ki az $f(t)$-vel gerjesztett oszcillátor időfüggését, ahol*

$$f(t) = \frac{F(t)}{m} = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad t < 0 \\ f_0 \mathrm{e}^{-\alpha t}, & \text{ha} \quad t > 0 \end{cases} \tag{4}$$

3.1. Emelt szintű feladat. *Hajítsunk el ferdén egy testet egy gyengén súrlódó közben ($F_s = -\gamma \mathbf{v}$) $|\mathbf{v}| = v_0$ kezdősebsséggel φ szögben a vízszinteshez képest! Mekkora szögben hajítsuk el a testet, hogy a lehető legtávolabb essen le?*

a.) *Először keressük meg azt az $\Delta x(\varphi)$ egyenletet, ami megadja szög függvényében az eldobott test távolságát! Ennek szög szerinti deriváltja adja a maximumot. Ehhez minden lépésnél hagyjuk el a súrlódásban másodrendű tagokat.Ellenőrízzünk: súrlódás nélkül $x(\varphi) \sim \sin(2\varphi)$.*

b.) *Jelöljük az azt egyenletet, ami formálisan megadja a szöget. Ekkor a pertirbációszámítás eszközeit használva határozzuk meg az eltérést a súrlódásmentes esettől, tehát tegyük fel, hogy* $\varphi = \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1$*, ahol* ε *a rendszer paramétereikből származtatható dimenziótlan kicsi szám.*

c.) *Így* φ_1*-re kapunk egy egyenletet, oldjuk ezt meg! Ahogy dimenzió analízisiből is kikövetkeztethető, a megoldásra valami ilyesmit várunk:*

$$\varphi = \frac{\pi}{4} - \gamma \frac{v_0}{mg} \tag{5}$$

Tehát 45 foknál kicsit kisebb szögben érdemes eldobni a testet.

3.2. Emelt szintű feladat. *Adott az alábbi, periodikusan lökdösött, súrlódásmentes,* ω_0 *sajátfrekvenciájú oszcillátorra ható erősűrűség:*

$$f_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \delta\left(t - \frac{2\pi n}{\omega}\right) \tag{6}$$

Írjuk fel az n. Dirac-delta utáni amplitúdóját a rezgésnek, amenyiben kezdetben állt az oszcillátor! (Hívjuk segítségül a komplex számkörről, trigonometriai addíciós tételekről és a geometriai sorokról tanultakat!) Rezonáns gerjesztés esetén mekkora lesz n "lökés" után az amplitúdó? Létezik-e olyan ω *amire bizonyos n-ekre lenullázódik az amplitúdó?*