

Elméleti mechanika A

Feladatsor és gyakorlati anyag

Kapás Kornél

Legutóbbi frissítés:
2021. január 25. 14:34

Tartalomjegyzék

1. Matematikai bevezetés	4
Komplex függvények	4
Fourier analízis	9
Gyakorló feladatok	22
2. Tehetetlenségi erők	24
Tehetetlenségi erők	24
Gyakorló feladatok	27
3. Variációszámítás	28
Matematikai variációszámítás	28
Nevezetes variációs problémák	43
Fermat-elv	52
Lagrange-i mechanika	56
Gyakorló feladatok	65

4. Egydimenziós mozgások	67
Periódusidő, fázistér és bifurkáció	67
Csillapított mozgások	78
Gyakorló feladatok	88
5. Síkmozgások	89
Centrális potenciál	89
Gyakorló feladatok	97
6. Szórás	99
Szórás merev forgásfelületen	99
Kis szögű szórás	102
Gyakorló feladatok	104
7. Kényszerek	105
Holonom kényszer	105
Anholonom kényszer	109
Gyakorló feladatok	112
8. Kis rezgések	113
Golyós-rugós rendszerek	113
Gyakorló feladatok	119
9. Hamiltoni mechanika	120
Hamilton-egyenletek	120
Hamilton-Jacobi mechanika	121
Adiabatikus invariánsok	125
Gyakorló feladatok	128
10. Merev testek	129
Impulzusmomentum	129
Tehetetlenségi nyomaték tenzor	132
Pörgettyűk	136
Gyakorló feladatok	137
11. 1D rugalmas kontinuum	138
Húrok rezgései	138
Vékony rudak hajlításai	144
Vékony rudak nagy lehajlásai és rezgései	147
Gyakorló feladatok	153

12.3D rugalmas kontinuum	154
Deformációk	154
Rugalmas hullámok és csillapítás	162
Gyakorló feladatok	166
13.Hidrodinamika	167
Tökéletes folyadékok	167
2D áramlások	168
Súrlódó folyadékok	173
Gyakorló feladatok	174

Matematikai bevezetés

Szükséges ismeretek és formulák

Komplex függvények

Reziduum-tétel

Fourier sorok

Fourier transzformációk

Komplex függvények

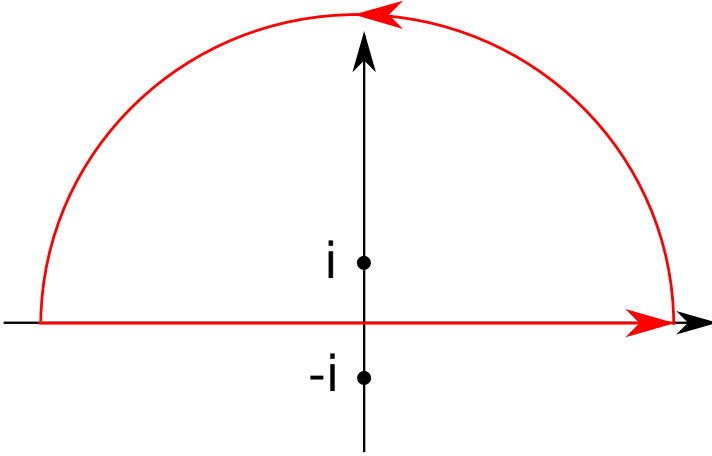
K1.1

Számoljuk ki az alábbi integrálokat reziduum-tétel segítségével:

a.) $\int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + 1)^{-1} dx$

b.) $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx)(x^2 + 1)^{-1} dx$

- a.) Vegyünk fel a komplex síkon egy olyan kontúrt, ami tartalmazza az eredeti integrál vonalát, és egy felülről bezárt, pozitív körüljárási irányú félkört, így egy zárt görbét alkotva:



1. ábra. Zárt kontúr a komplex síkon, melyre alkalmazható a Reziduum-tétel.

A teljes zárt kontúrra alkalmazhatjuk a Reziduum-tételt. A kérdéses integrált úgy kapjuk, ha a zárt kontúrintegrál eredményéből levonjuk a félkör járulékét. Annak kiszámításához paraméterezzük a félkört a komplex síkon, majd a sugárral tartunk végtelenhez:

$$z = Re^{i\varphi} \quad dz = Re^{i\varphi}id\varphi \quad (1.1.1)$$

Így a felső félkör járuléka:

$$\int_{\Gamma_{FK}} \frac{1}{z^2 + 1} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{1}{R^2 e^{2i\varphi} + 1} Rie^{i\varphi} d\varphi = 0 \quad (1.1.2)$$

Tehát ezzel nem kell foglalkozni, járulék zérus. A teljes zárt görbére alkalmazzuk a reziduum-tételt:

$$\int_{\Gamma_Z} \frac{1}{z^2 + 1} dz = 2\pi i \text{Res} \left(\frac{1}{z^2 + 1} \right) \quad (1.1.3)$$

$$\text{Res} \left(\frac{1}{z^2 + 1} \right) = \text{Res} \left(\frac{1}{(z + i)(z - i)} \right) = \frac{1}{z + i} \Big|_{z=i} = \frac{1}{2i} \quad (1.1.4)$$

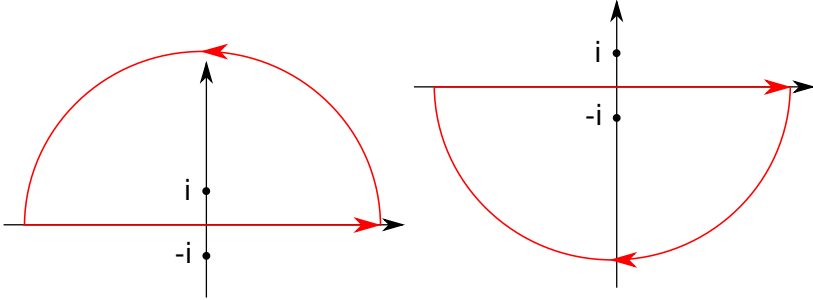
Mivel a keresett integrált a zárt görbére vett integrálból kivonva a félkört kapjuk:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \pi \quad (1.1.5)$$

b.) Ezt az előzőhöz teljesen hasonlóan kell megoldani. Arra kell odafigyelni, hogy a nagy félkört merre vegyük fel. Ez t előjeltől fog függeni:

$$\int_{\Gamma_{FK}} \frac{e^{itz}}{z^2 + 1} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{e^{itR \cos \varphi} e^{-tR \sin \varphi}}{R^2 e^{2i\varphi} + 1} R i e^{i\varphi} d\varphi = 0 \quad , \text{ ha } t > 0 \quad (1.1.6)$$

A $t < 0$ esetben alulról kell zárni e szerint a félkört. Itt arra kell figyelni, hogy a $\sin(x)$ függvény az adott integrálási tartományon legyen negatív, hogy az exponenciális lecsengjen $R \rightarrow \infty$ esetén. Ez igaz $\varphi \in [0, -\pi]$ tartományon. Figyelni kell továbbá arra, hogy a körüljárás megfelelő legyen, esetünkben bal sodrású (lásd ábra). Ez annyiban módosítja a zárt görbére vett integrált a pólus járuléka $-2\pi i$ -vel arányos.



2. ábra. Körüljárási irány és kontúr $t > 0$ esetén (bal oldali ábra), illetve $t < 0$ esetén (jobb oldali ábra). Figyelem: fordított körüljárási irány esetén a Reziduum-tételben $-2\pi i$ szerepel!

Továbbá:

$$\text{Res} \left(\frac{e^{itz}}{z^2 + 1} \right) = \frac{e^{itz}}{z + i} \Big|_{z=i} = \frac{e^{-t}}{2i} \quad , \text{ ha } t > 0 \quad (1.1.7)$$

$$\text{Res} \left(\frac{e^{itz}}{z^2 + 1} \right) = \frac{e^{itz}}{z - i} \Big|_{z=-i} = -\frac{e^t}{2i} \quad , \text{ ha } t < 0 \quad (1.1.8)$$

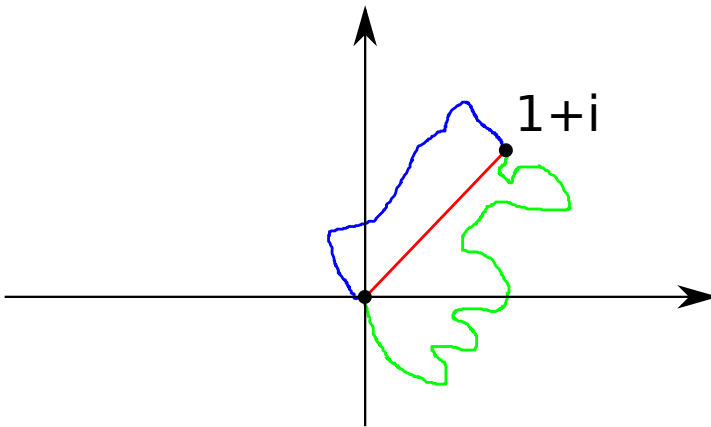
Így a keresett integrál kompakt formában:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|t|} \quad (1.1.9)$$

K1.2

Számoljuk ki $f(z) = z^2$ integrálját $z_0 = 0$ és $z_1 = 1+i$ komplex számok között!

Egy vonalintegrál elvégzéséhez arra van szükség, hogy paraméterezzük a görbét, ami mentén integrálni szeretnénk. Mivel most komplex síkon vagyunk, ezért a z komplex változót kell e szerint paraméterezni egy t valós paraméterrel.



3. ábra. Különböző kontúrokra azonos eredményt kell kapni reguláris függvények integrálása esetén. Legegyszerűbb választás az egyenes.

Ahogy az ábra is mutatja, bármely körbe mentén integrálhatnánk, de legegyszerűbb módja ennek az alábbi:

$$z(t) = (1 + i)t \quad t \in [0, 1] \tag{1.1.10}$$

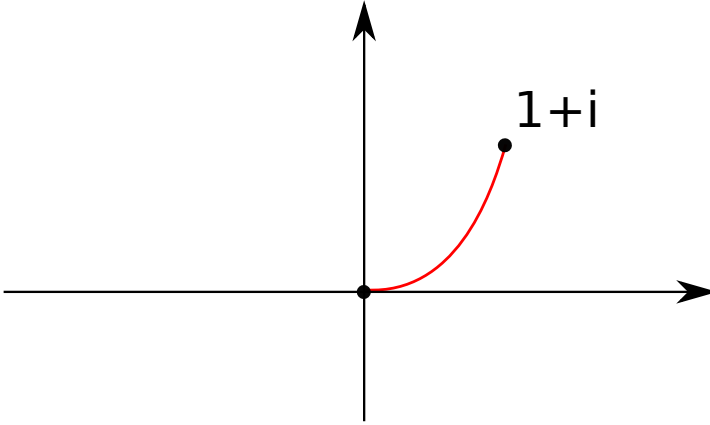
Ez után a függvényt és az integrálási mértéket is át kell e szerint írni:

$$z^2 = (1 + i)^2 t^2 = 2it^2 \quad dz = (1 + i)dt \tag{1.1.11}$$

Ezeket írjuk be az integrálba, és így már két sima valós integrált kapunk:

$$\int_{z_0}^{z_1} z^2 dz = \int_0^1 2it^2(1 + i)dt = \int_0^1 (-2t^2)dt + i \int_0^1 (2t^2)dt = -\frac{2}{3}(1 - i) \tag{1.1.12}$$

Most nézzünk meg egy másik lehetséges integrálási utat:



4. ábra. Kontúrintegrál egy parabola alakú pálya mentén.

Ekkor a paraméterezés (egy parabola):

$$z(t) = (1 + it)t = t + it^2 \quad t \in [0, 1] \quad (1.1.13)$$

Ez után a függvényt és az integrálási mértéket is át kell e szerint írni:

$$z^2 = (t + it^2)^2 = t^2 - t^4 + 2it^3 \quad dz = (1 + 2it)dt \quad (1.1.14)$$

Ezeket írjuk be az integrálba, és így már két sima valós integrált kapunk:

$$\int_{z_0}^{z_1} z^2 dz = \int_0^1 (t^2 - t^4 + 2it^3)(1 + 2it)dt \quad (1.1.15)$$

$$\int_{z_0}^{z_1} z^2 dz = \int_0^1 (t^2 - t^4 + 2it^3 - 2it^5 - 4t^4)dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{i}{4} - i\frac{1}{3} - \frac{4}{5} = -\frac{2}{3}(1 - i) \quad (1.1.16)$$

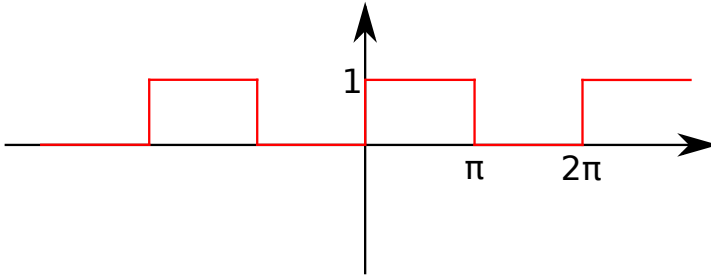
Tehát eddigi két görbére valóban ugyanaz az eredmény jött ki. Ha nincsen szingularitás, akkor bármely görbére az igaz!

Fourier analízis

K1.3

Adjuk meg a négyszögjel Fourier együtthatóit! Mutassuk meg, hogy (konstans eltolástól eltekintve) a Fourier sor tagjaiban valójában csak páratlan, valós függvények jelennek meg!

Legyen a négyszögjel olyan, hogy $[0, \pi]$ tartományon 1, míg $[\pi, 2\pi]$ tartományon zérus, majd ez periodikusan ismétlődjön:



5. ábra. Rögzített 2π periódusú négyszögjel.

Ekkor az együtthatók:

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{imx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{imx} dx \quad (1.2.17)$$

$$c_m = \frac{1}{2\pi im} (e^{im\pi} - 1) = \frac{1}{2\pi im} (\cos(m\pi) + i \sin(m\pi) - 1) \quad (1.2.18)$$

Felhasználva a trigonometrikus függvényekről az ismereteinket:

$$c_m = \frac{1}{2\pi im} ((-1)^m - 1) \rightarrow c_{2m+1} = -\frac{1}{\pi i(2m+1)}, \quad c_{2m} = 0 \quad (1.2.19)$$

Ez akkor igaz, ha $m = 0$. Vizsgáljuk meg külön azt az esetet is. Látható, hogy a c_m együttható $0/0$ alakot vesz fel. Felhasználva a L'Hospital szabályt:

$$c_0 = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \frac{(-1)^m - 1}{m} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{m \rightarrow 0} \frac{(-1)^m \ln(-1)}{1} = \frac{1}{2\pi i} \ln e^{i\pi} = \frac{1}{2} \quad (1.2.20)$$

Egy másik lehetséges mód az $m = 0$ -ás eset kiszámítására (ami általánosan is működik), az az eredeti integrál elvégzése $m = 0$ -t beírva:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi 0 dx = \frac{1}{2} \quad (1.2.21)$$

Most írjuk vissza az eredeti képletbe:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-inx} = \frac{1}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{i\pi(2n+1)} \right) e^{-i(2n+1)x} \quad (1.2.22)$$

Hogy szemléletesebb alakot kapjunk, párosítsuk az összeg tagjait. Vegyük először $n = 0$ -át és $n = -1$ -et:

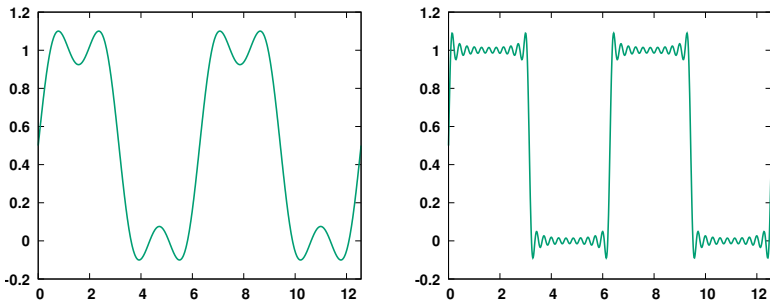
$$-\frac{1}{i\pi} e^{-ix} + \frac{1}{i\pi} e^{ix} = \frac{2}{\pi} \sin(1 \cdot x) \quad (1.2.23)$$

Hasonlóan $n = 1$ és $n = -2$ -vel:

$$-\frac{1}{3i\pi} e^{-3ix} + \frac{1}{3i\pi} e^{3ix} = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(3 \cdot x)}{3} \quad (1.2.24)$$

Végül ezekkel felírva a sort:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1) \cdot x)}{2n+1} \quad (1.2.25)$$

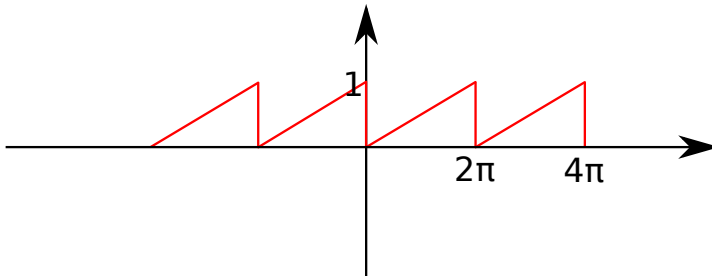


6. ábra. A Fourier sor első 3, illetve első 12 tagjának összege. Szépen látszik, hogy egyre magasabb rendeket figyelembe véve hogyan alakul ki a négyszögjel.

K1.4

Adjuk meg a fűrészfog-jel Fourier együtthatóit! Mutassuk meg, hogy (konstans eltolástól eltekintve) a Fourier sor tagjaiban valójában csak páratlan, valós függvények jelennek meg!

Ez a jelalak hasonló az előzőhöz, csak konstans szakaszok helyett lineárisok vannak benne:



7. ábra. Rögzített 2π periódusú fűrészfog jel.

Ekkor az együtthatók:

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{imx} dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \frac{x}{2\pi} e^{imx} dx + \int_{-\pi}^0 \left(\frac{x}{2\pi} + 1 \right) e^{imx} dx \right) \quad (1.2.26)$$

Az integrált parciális integrálással könnyedén kiszámolhatjuk:

$$\int_0^{\pi} \frac{x}{2\pi} e^{imx} dx = \frac{x}{2\pi} \frac{e^{imx}}{im} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{e^{imx}}{im} dx \quad (1.2.27)$$

$$\int_{-\pi}^0 \frac{x}{2\pi} e^{imx} dx = \frac{x}{2\pi} \frac{e^{imx}}{im} \Big|_{-\pi}^0 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{e^{imx}}{im} dx \quad (1.2.28)$$

$$\int_{-\pi}^0 e^{imx} dx = \frac{e^{imx}}{im} \Big|_{-\pi}^0 \quad (1.2.29)$$

Ezeket össze kell adogatni:

$$c_m = -\frac{e^{-im\pi}}{4\pi^2 m^2} + \frac{e^{im\pi}}{4\pi^2 m^2} + \frac{ie^{-im\pi}}{4\pi m} - \frac{ie^{im\pi}}{4\pi m} - \frac{i}{2\pi m} \quad (1.2.30)$$

Trigonometrikus összefüggésekkel:

$$c_m = \frac{i \sin(m\pi)}{2\pi^2 m^2} + \frac{\sin(m\pi)}{2\pi m} - \frac{i}{2\pi m} = -\frac{i}{2\pi m} \quad (1.2.31)$$

Itt is lehet párosítani a tagokat: $m = 1$ -es az $m = -1$ -essel:

$$-\frac{i}{2\pi} e^{-ix} + \frac{i}{2\pi} e^{ix} = -\frac{1}{\pi} \sin(x) \quad (1.2.32)$$

Míg $m = 2$ és $m = -2$ -vel:

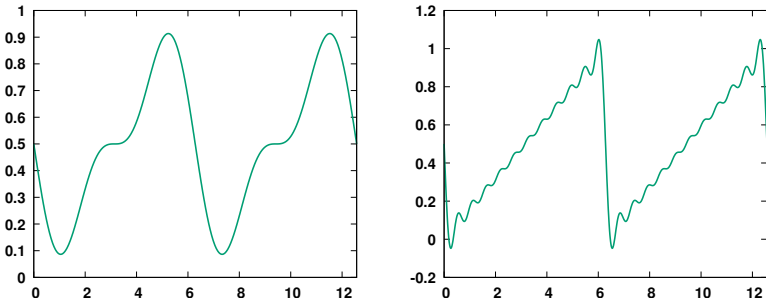
$$-\frac{i}{4\pi} e^{-2ix} + \frac{i}{4\pi} e^{2ix} = -\frac{1}{2\pi} \sin(2x) \quad (1.2.33)$$

Az $m = 0$ esetén most nézzük meg az eredeti integrált:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \frac{x}{2\pi} dx + \int_{-\pi}^0 \left(\frac{x}{2\pi} + 1 \right) \right) = \frac{1}{2} \quad (1.2.34)$$

Tehát a teljesen összeg:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \quad (1.2.35)$$



8. ábra. A Fourier sor első 3, illetve első 12 tagjának összege. Szépen látszik, hogy egyre magasabb rendeket figyelembe véve hogyan alakul ki a négyszögjel.

K1.5

Lássuk be, hogy az alábbi Gauss függvény valóban normált:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon^2}} e^{-\frac{x^2}{2\epsilon^2}}$$

Ehhez először számoljuk ki az integrál négyzetét:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\epsilon^2}} dx \rightarrow I^2 = \frac{1}{2\pi\epsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\epsilon^2}} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\epsilon^2}} dy \quad (1.2.36)$$

Térjünk át polár koordinátákra! ($x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $dx dy = r dr d\varphi$):

$$I^2 = \frac{1}{2\pi\epsilon^2} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2\epsilon^2}} r dr d\varphi \quad (1.2.37)$$

Nézzük meg az exponenciális deriváltját:

$$\frac{d}{dr} e^{-\frac{r^2}{2\epsilon^2}} = -\frac{r}{\epsilon^2} e^{-\frac{r^2}{2\epsilon^2}} \quad (1.2.38)$$

Ez szerepel pont az integrandusban, tehát meg is van a primitív függvény! A szög szerinti integrál egy triviális 2π szorzót hogy be. Így:

$$I^2 = -e^{-\frac{r^2}{2\epsilon^2}} \Big|_0^{\infty} = 1 \rightarrow I = 1 \quad (1.2.39)$$

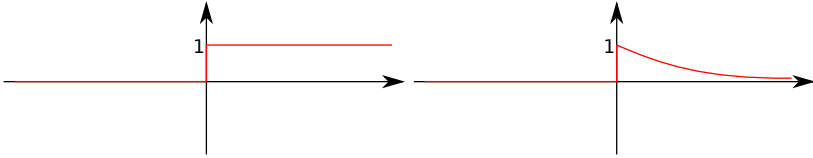
A negatív előjelet az zárja ki, hogy az integrált függvény mindenütt pozitív, így az integráljának is annak kell lennie.

K1.6

Számoljuk ki a lépcsőfüggvény Fourier-transzformáltját! Ellenőrizzük eredményünket úgy, hogy újabb transzformációt alkalmazva vissza kell kapnunk a lépcsőfüggvényt. Mit tapasztalunk?

A $\Theta(x)$ Fourier-transzformáltját nehézkes közvetlenül kiintegrálni, az $\lim_{k \rightarrow \infty} e^{ikx}$ értelmezése miatt. Használjuk egy közelítő függvényt:

$$\Theta_\alpha(x) = \Theta(x)e^{-\alpha x} \quad (1.2.40)$$



9. ábra. Bal oldalon látható a tiszta lépcsőfüggvény, míg jobb oldalon az $\alpha > 0$ -val módosított verzió.

ahol $\alpha > 0$

$$\tilde{\Theta}_\alpha(k) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} e^{-ikx} dx = \frac{e^{-(\alpha+ik)x}}{-(\alpha+ik)} \Big|_0^\infty = \frac{e^{-\alpha x} e^{-ikx}}{-(\alpha+ik)} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\alpha+ik} \quad (1.2.41)$$

Itt egy érdekes dologba ütközünk. Ha naivan behelyettesítünk $\alpha = 0$ -át, akkor nem a helyes eredményt kapjuk. Hogy ezt lássuk, vegyük az eredmény képzetes és valós részét:

$$\tilde{\Theta}_\alpha(k) = \frac{1}{\alpha+ik} \frac{\alpha-ik}{\alpha-ik} = \frac{\alpha}{\alpha^2+k^2} - i \frac{k}{\alpha^2+k^2} \quad (1.2.42)$$

A képzetes részben nyugodtan be lehet írni $\alpha = 0$ -át, viszont mi a helyzet a valós résszel? Ott $k = 0$ esetén ezt nem tehetjük meg. Be lehet látni, hogy a valós rész k szerinti integrálja π (α -tól függetlenül):

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\alpha}{\alpha^2+k^2} dk = \pi \quad (1.2.43)$$

Továbbá $\alpha \rightarrow 0$ esetén ez a függvény pontonként tart zérushoz, kivéve $k = 0$ -ban, ott végtelenhez tart. Látszik tehát, hogy ez a függvény egy $\pi\delta(k)$

disztribúcióhoz tart! Végül tehát a lépcsőfüggvény Fourier-transzformáltja:

$$\tilde{\Theta}(k) = \pi\delta(k) + \frac{1}{ik} \quad (1.2.44)$$

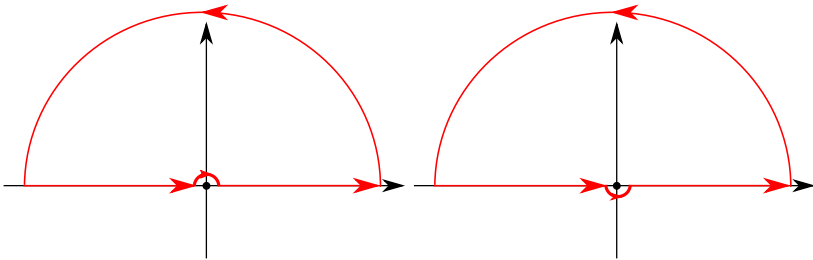
K1.7

Számoljuk ki az $1/(ik)$ függvény Fourier-transzformáltját! A probléma az lesz, hogy a szingularitás a kontúron van. Milyen kapcsolatban áll ez a feladat az előzővel?

Mivel az integrálási kontúr áthalad egy szingularitáson ezért nem egyértelmű az integrál értelmezése, erre több megoldás létezik. Most egy olyan megoldáson megyünk végig, amit úgy definiálunk, hogy a paritása a transzformálnak megegyezzen az eredeti függvényével. Ehhez az integrált a függvény szimmetrikus főértékével azonosítjuk:

$$f(x) = \text{PV} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{ik} dk \quad (1.2.45)$$

Két módon is felvehetjük a kontúrt:



10. ábra. Főértékintegrális definíciót használva mind a két kontúr egy lehetséges választás.

Először vegyünk fel egy olyan kontúrt, ami ebből a főérték integrálból áll, egy kis ε sugarú körből (ami a főérték integrál 2ε "kihagyott" szakaszát köti össze), és egy nagy félkörből, ami bezárja a kontúrt. E zárt kontúrban nincs szingularitás, így annak értéke zérus. A félkör értéke (ahogy korábban láttuk) $x > 0$ esetén zérus, így csak a kis félkör járuléka számít. Ahhoz, hogy a kérdéses integrál értékét kapjuk meg, a teljes zárt kontúrhoz az óramutató járásával ellentétes irányban vett kis félkört kell kiszámolni. Korábbihoz hasonlóan:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{e^{ikx}}{i\varepsilon e^{i\varphi}} i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi \simeq \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (1 + \mathcal{O}(k)) dk \simeq \frac{1}{2} \quad (1.2.46)$$

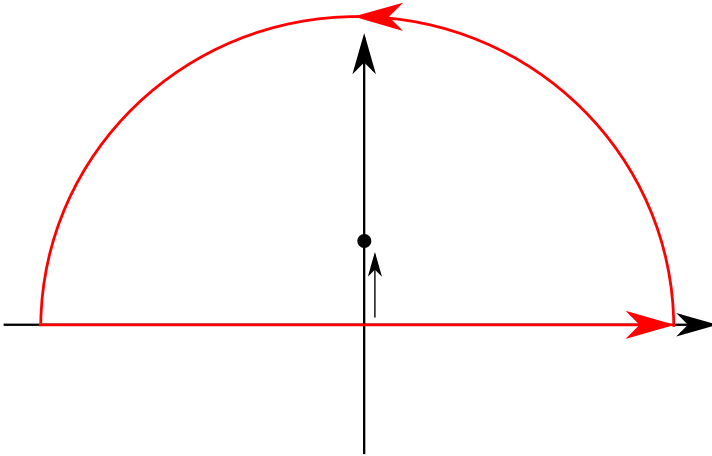
Mivel a félkör az origó körül van, és sugara tart majd zérushoz, így az exponenciális 1-el lesz egyenlő. Így járuléka $1/2$. A másik fajta bezárás esetén (amikor a kis félkört alulról zárjuk) is ugyanez az eredményt jön ki. Ott a szingularitás a kontúrban belül van, így ott kell venni a Reziduum-át az integrandusnak. Ebből most le kell vonni a kis félkör járulékát, hiszen ellentétes irányban zárul. Így:

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{PV} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{ik} dk = \frac{1}{2\pi} 2\pi i \text{Res} \left(\frac{e^{ikx}}{ik} \right) - \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{2\pi} 2\pi i \left. \frac{e^{ikx}}{i} \right|_{k=0} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{1.2.47}$$

Analóg módon belátható, hogy $x < 0$ tartományon az eredmény $-1/2$ lesz. Így a keresett $f(x)$ nem más, mint:

$$f(x) = \Theta(x) - \frac{1}{2} \tag{1.2.48}$$

Ez valóban egy páratlan függvény. Megjegyzés: igazából ennek a függvénynek szigorúan véve nincs rendes Fourier-transzformáltja. Az itt levezetett transzformációs szabályt úgy definiáltuk, hogy eredményben egy páratlan, valós függvényt kapjunk. Van egy másik fajta megközelítés, ami azonban nem teljesen korrekt, de mégis hasznos lehet, ha helyén kezeljük. Ez az, amikor eltoljuk a szingularitást a tengelyről, integrálunk, majd visszatoljuk:



11. ábra. Szokásos eljárás, hogy a szingularitást eltoljuk a tengelyről, majd az integrál elvégzése után "visszatoljuk". Ez azonban nem teljesen korrekt eljárás.

Ekkor az elvégezendő integrál:

$$f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{i(k - i\varepsilon)} dk \quad (1.2.49)$$

Mindent lehet hasonlóan csinálni, mint a korábbi példákban: $x > 0$ esetén felülről zárjuk a kontúrt, míg $x < 0$ esetén alulról. Az eredmény $x > 0$ esetén:

$$f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \left(2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{ikx}}{i(k - i\varepsilon)} \right) \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \left(2\pi i \frac{e^{ikx}}{i} \Big|_{k=i\varepsilon} \right) = 1 \quad (1.2.50)$$

Ha alulról zárjuk a félkört (ami az $x < 0$ esete), akkor az eredmény egyszerűen zérus. Így a megoldásunk:

$$f(x) = \Theta(x) \quad (1.2.51)$$

Tehát a jól ismert lépcsőfüggvény. Láthattuk az előző példákban, hogy a lépcsőfüggvény Fourier-transzformáltja viszont nem tisztán $1/(ik)$. Itt pontosan ugyanaz a gond lép fel, hogy eltolva a zérust a valójában megjelenik egy disztribúció, amit kiintegrálva egy plusz járulékot kapunk. Ez egy konstans eltolást jelent az eredményben. Ez a fajta "szabadság" tetten érhető, ha a másik irányba toljuk el a pólust. Könnyedén belátható, hogy ebben a esetben

az eredmény:

$$f(x) = \Theta(x) - 1 \tag{1.2.52}$$

Helyesen kezelve ezeket, fizikailag releváns számításoknál is alkalmazhatóak a különböző definíciók.

K1.8

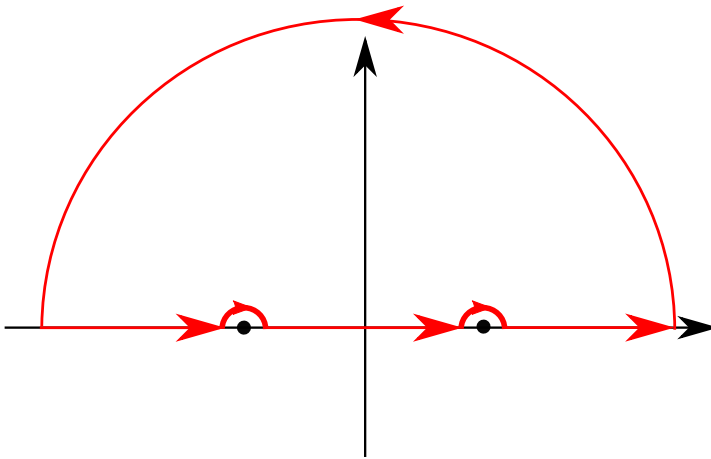
Számoljuk ki az $1/(\omega_0^2 - \omega^2)$ függvény Fourier-transzformáltját! Tehát végezzük el az alább integrált:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2} d\omega \quad (1.2.53)$$

Vessünk egy pillantást az előző feladatban felvázolt különböző számítási módokra is!

Itt is több lehetséges mód létezik, azonban csak a főérték integrálás a teljesen korrekt. A szingularitások körüli kis félkör paraméterezése:

$$\omega = \pm\omega_0 + \varepsilon e^{i\varphi} \quad (1.2.54)$$



12. ábra. Kontúr, ami az integrálásnál használunk. A teljes kontúr zárt, így arra az integrál zérus. Járulékok a kis félkörökből jönnek.

Egy félkörhöz tartozó integrál:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^0 \frac{e^{i(\omega_0 + \varepsilon e^{i\varphi})t}}{-2\omega_0 \varepsilon e^{i\varphi}} i \varepsilon e^{i\varphi} d\varphi = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{e^{i\omega_0 t} e^{i\varepsilon e^{i\varphi} x}}{2\omega_0 i} d\varphi \quad (1.2.55)$$

Tartsunk már most ε -nal zérushoz. Így az integrál már könnyen elvégezhető:

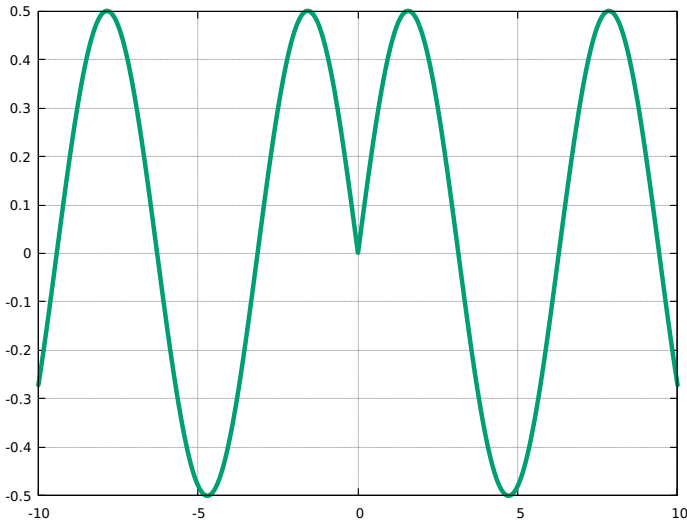
$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{e^{i\omega_0 t}}{2\omega_0 i} d\varphi = -\frac{1}{4\omega_0 i} e^{i\omega_0 t} \quad (1.2.56)$$

A másik szingularitással is teljesen hasonlóan kell eljárni. Kettő összege:

$$-\frac{1}{4\omega_0 i} e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{4\omega_0 i} e^{-i\omega_0 t} = -\frac{1}{2\omega_0} \sin(\omega_0 t) \quad (1.2.57)$$

Mivel a teljes zárt kontúr nem tartalmazott szingularitást, arra vett integrál zérus, továbbá a nagy félkör járuléka és zérus. Így a kapott eredményt maga a kérdéses integrál (-1) -szerese. Kérdés, hogy mi a helyzet $t < 0$ esetén? Előzőek alapján könnyű beátni, hogy az eredmény hasonló, csak előjelet vált. Így

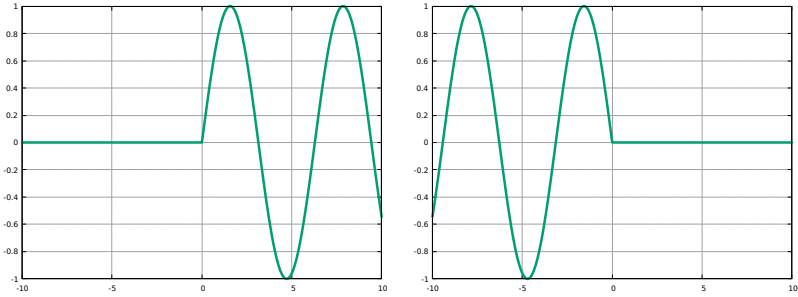
$$f(x) = \frac{1}{2\omega} \operatorname{sgn}(t) \sin(\omega_0 t) \quad (1.2.58)$$



13. ábra. Az $f_\omega = 1/(\omega_0^2 - \omega^2)$ függvény Fourier-transzformáltja amennyiben főérték integrállal számolunk.

És mi a helyzet, hogy ha itt is eltoljuk a gyököket? Itt ugye négy különböző lehetőségünk is van erre. Amennyiben ellenkező irányba toljuk a gyököket, akkor az eredményünk komplex lesz (ez nem baj). Érdekesebb eset, amikor

azonos irányba toljuk őket, ugyanis ekkor vagy $t > 0$ vagy $t < 0$ tartományon zérus a függvény, míg a másikon arányos sin függvénnyel:



14. ábra. Az $f_\omega = 1/(\omega_0^2 - \omega^2)$ függvény Fourier-transzformáltja abban az esetben, amikor felfele toljuk (bal oldali ábra), illetve lefele (jobb oldali ábra) toldjuk a két szingularitást.

Gyakorló feladatok

F1.1 Lássuk be az alábbi komplex függvényekre a Cauchy-Riemann relációkat!

a.) $f(z) = z^2$

b.) $f(z) = \sin(z)$

c.) $f(z) = \ln(z)$

F1.2 Adott az alábbi komplex függvény: $f(z) = z^2$. Számoljuk ki A és B komplex számok közötti vonalintegrált, ahol $A = 0$ és $B = 1 + 2i$. Próbáljunk ki több utat is!

F1.3 Számoljuk ki a $\sin^2(2x)$ Fourier-együtthatóit! Tipp: mivel a megadott függvény (trigometria azonosságokkal is belátható) véges összege \sin és \cos függvényeknek, csak néhány együttható lesz véges, többi zérus.

F1.4 Adott az alábbi komplex függvény:

$$f(z) = x^3 - \alpha xy^2 + i(3x^2y - y^\alpha)$$

Mi legyen α értéke, hogy teljesüljenek a Cauchy-Riemann relációk? Hogyan függ z komplex változótól a függvény ($z = x + iy$)

F1.5 Végezzük el az alábbi integrálokat a Reziduum-tétel segítségével:

a.) $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx)(x^2 + 1)^{-1} dx$

b.) $\int_{-\infty}^{\infty} (2x^2 + 5) [(x^2 + 1) \cdot (x^2 + 4)]^{-1} dx$

F1.6 Adjuk meg az alábbi periodikus függvények Fourier együtthatóit!

a.) Négyszögjel

b.) Háromszögjel

c.) $|\sin(x)|$

F1.7 Számoljuk ki az alábbi függvény saját magával vett konvolúcióját:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon^2}} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}}$$

Ezek alapján mit válaszolnánk arra a kérdésre, hogy mi az aminek saját magával vett konvolúciója szintén saját maga?

F1.8 Vegyük újra a $\sin^2(x)$ függvényt! Adjuk meg most ennek a Fourier-transzformáltját! Ehhez használjuk fel, hogy:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)} dk = \delta(x-y) \quad (1.3.59)$$

Eredményül véges számú Dirac-delta összegét kell kapjunk, hiszen az eredeti függvényünk (lásd korábbi példa) felírható, mint trigonometrikus függvények véges összege.

F1.9 Számoljuk ki az általános periodicitású négyszögjel Fourier-transzformáltját! A periódusidővel végtelenhez tartva mit kapunk?

Tehetlenségi erők

Szükséges ismeretek és formulák

Erők felírása gyorsuló rendszerben

Tehetlenségi erők

K2.1

Hogyan néz ki egy forgról korongról nézve egy konstans sebességű egyenes vonalon haladó test pályája? Lehetséges-e, hogy ez a pálya saját magát metszi?

Először vizsgáljuk meg az ezt leíró egyenletet:

$$\ddot{\mathbf{r}} = 2\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (2.1.1)$$

Mivel korongról van szó, a szögsebesség és a helyvektor mindig merőlegesek egymásra:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega\dot{y} + \omega^2 x \\ \ddot{y} &= -2\omega\dot{x} + \omega^2 y \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Oldjuk meg a problémát intuitívan: igazából tudjuk, hogy ez egy egyenes vonalú egyenletes mozgás. Forgó rendszerbe beleülve, csak ezt a pályát időfüggően elforgatni:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{O}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t) \quad (2.1.3)$$

ahol

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \varphi = \omega t \quad (2.1.4)$$

Legyen $\mathbf{r}_0 = (0, -r_0)$, míg $\mathbf{v}_0 = (0, v_0)$. Így

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 t - r_0) \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} \quad (2.1.5)$$

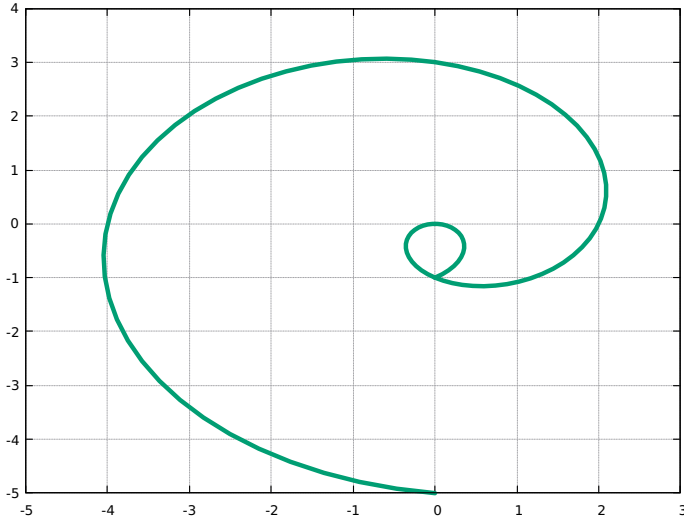
Lehetséges-e olyan megoldás, hogy ebben a rendszerben r_0 -ban ülve ellökök egy tárgyat, és egyszer visszaér hozzám? Mivel a vektort szorzó prefaktor

monotonan nő, ezért ez csak akkor lehetséges, ha:

$$v_0 T - r_0 = r_0 \quad \sin(\omega T) = 0 \quad \cos(\omega T) = -1 \quad (2.1.6)$$

Ezekből:

$$T = \frac{2r_0}{v_0} \quad \omega \frac{2r_0}{v_0} = \pi \rightarrow v_0 = \frac{2r_0}{\pi\omega} \quad (2.1.7)$$



15. ábra. Egyenesvonalú egyenletes mozgás pályája egy forgó korongról nézve. Megfelelő kezdőfeltételek mellett létezik saját magát metsző pálya.

K2.2

Mi tartja körpályán a csillagokat?

Az egyenlet itt is:

$$\ddot{\mathbf{r}} = 2\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (2.1.8)$$

Az viszont itt tudjuk, hogy mekkora a sebessége a csillagoknak: $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}$, így

$$\ddot{\mathbf{r}} = 2(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 2\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (2.1.9)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (2.1.10)$$

Ez éppen a centrifugális erővel megegyező nagyságú, de ellentétes irányú, a csillagokat körpályán tartó centripetrális erő.

Gyakorló feladatok

F2.1 Forogjon egy bolygó ω szögsebességgel. Sétáljunk el az északi pólustól a déli pólusig egy állandó v sebességgel a főkör mentén. Mekkora és milyen irányú erű hat ránk a szélességi fok függvényében?

F2.2 Egy kis vitorlás hajón a kapitány a felhúzza az m tömegű horgonyt egy állandó v_0 sebességgel az egyenlítői szélcsendes zónában. Milyen irányban és mekkora sebességgel indul el a hajó?

F2.3 Milyen irányban és hány méterre tér el a függőlegetől a 45. szélességi fokon egy 100 méter magasból leejtett test?

F2.4 Egy R sugarú pályán kering egy űrállomás a Föld körül. Ebből v_0 sebességgel kilökünk egy kis testet sugárirányban kifelé. Az űrállomás rendszeréből nézve milyen pályát ír le a kis test? Tegyük fel, hogy kis test maximális távolsága az állomástól sokkal kisebb, mint R .

Variációszámítás

Szükséges ismeretek és formulák

Euler-Lagrange egyenlet

Szabad végpontok

Magasabb deriváltak esete

Matematikai variációszámítás

K3.1

Adjuk meg két pont közötti legrövidebb görbe egyenletét! Mi az egyenlet, ha a végpont x vagy y koordinátája nincs rögzítve?

Egy görbe ívhosszeleme:

$$ds = \sqrt{ds^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (3.1.1)$$

Így az adott szakaszon egy tetszőleges ív hossza:

$$S = \int ds = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx \quad \rightarrow \quad L = \sqrt{1 + y'^2} \quad (3.1.2)$$

Az ELE:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{\partial L}{\partial y} \quad (3.1.3)$$

ami alapján:

$$p' = \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0 \quad \rightarrow \quad p = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{konst.} \quad (3.1.4)$$

Ebből egy kis átalakítás után látszik, hogy:

$$y'(x) = \text{konst.} \quad (3.1.5)$$

Tehát a megoldás:

$$y(x) = a \cdot x + b \quad (3.1.6)$$

Most nézzük meg, hogy mi a helyzet, ha a végpont y koordinátája nincs rögzítve. Ekkor:

$$p(x_1) = 0 \quad y'(x) = 0 \quad y(x) = b \quad (3.1.7)$$

Mi történne, ha az x koordináta nincs rögzítve a végpontban? Ekkora a kanonikus energiának kell zérusnak lennie a végpontban:

$$E = py' - L = \frac{y'(x)^2}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} - \sqrt{1 + y'(x)^2} = -\frac{1}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \quad (3.1.8)$$

Ez akkor lesz zérus, ha $y(x) = \infty$, tehát egy függőleges vonalat kapunk.

K3.2

Keressük meg az alábbi funkcionál extrémumát:

$$S = \int_0^1 (y(x)^2 + y'(x)^2) dx$$

úgy, hogy $y(0) = 1$ és $y(1) = e$.

Kanonikus mennyiségeink:

$$p = \frac{\partial L}{\partial y'} = 2y'$$

$$F = \frac{\partial L}{\partial y} = 2y$$

$$E = py' - L = y'(x)^2 - y(x)^2 \quad (3.1.9)$$

Euler-Lagrange egyenlet:

$$p' = F \rightarrow y''(x) = y(x) \quad (3.1.10)$$

Ez egy lineáris egyenlet, így az $e^{\lambda x}$ alakú megoldások biztosan jók. De tudjuk, hogy mi az, aminek második deriváltja saját maga: $\text{sh}(x)$ és $\text{ch}(x)$. Ezeknek tetszőleges lineáris kombinációja jó:

$$y(x) = A\text{ch}(x) + B\text{sh}(x) = A \frac{e^x + e^{-x}}{2} + B \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (3.1.11)$$

$$y(0) = A = 1 \rightarrow A = 1 \quad (3.1.12)$$

$$y(1) = \frac{e + \frac{1}{e}}{2} + B \frac{e - \frac{1}{e}}{2} = 1 \rightarrow B = 1 \quad (3.1.13)$$

Határfeltételekkel tehát: $A = 1$, $B = 1$. Visszaírva ezt a kanonikus energiába és a hatásba:

$$E = (\text{sh}(x) + \text{ch}(x))^2 - (\text{ch}(x) + \text{sh}(x))^2 = 0 \quad (3.1.14)$$

$$S = \int_0^1 ((\text{sh}(x) + \text{ch}(x))^2 + (\text{ch}(x) + \text{sh}(x))^2) dx = e^2 - 1 \simeq 6.3891 \quad (3.1.15)$$

K3.3

Keressük meg az alábbi funkcionál extrémumát:

$$S = \int_0^1 (1+x)y'(x)^2 dx$$

Kanonikus mennyiségeink:

$$p = \frac{\partial L}{\partial y'} = 2y'(x)(1+x)$$

$$F = \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$E = py' - L = y'(x)^2(1+x) \quad (3.1.16)$$

Most ugyan kiírtuk a kanonikus energiát, de jelen esetben az nem megmaradó mennyiség, hiszen a Lagrange-függvény expliciten függ az x -től. A Lagrange-függvény abban speciális, hogy nem függ az $y(x)$ -től, így az ehhez tartozó kanonikus erő zérus, ami azt jelenti, hogy a kanonikus impulzus állandó.

$$p' = F \rightarrow 2y'(x)(1+x) = c_1 \quad (3.1.17)$$

$$y'(x) = \frac{c_1}{2} \frac{1}{1+x} \rightarrow y(x) = \frac{c_1}{2} \ln(1+x) + c_2 \quad (3.1.18)$$

K3.4

Keressük meg az alábbi funkcionál extrémumát:

$$S = \int_0^1 (y + x)^2 dx$$

Kanonikus mennyiségeink:

$$p = \frac{\partial L}{\partial y'} = 0$$

$$F = \frac{\partial L}{\partial y} = 2(y + x)$$

$$E = -(y + x)^2 \tag{3.1.19}$$

$$p' = F \rightarrow 2(y + x) = 0 \tag{3.1.20}$$

Ennek lehetséges megoldása:

$$y(x) = -x \tag{3.1.21}$$

ami egyben a globális minimuma a hatásnak. Látható, hogy nincsenek szabad paraméterek a megoldásban. Ennek az az oka, hogy a Lagrange-függvény nem tartalmazta $y(x)$ deriváltjait. Ekkor zérus szabad paraméter van, míg minden újabb rendű deriválás behoz kettő további szabad paramétert, hiszen egy n -ed rendű Lagrange-függvényből $2n$ -ed rendű differenciálegyenletet kapunk. Tehát jelen esetben nem lehet akármilyen peremfeltétel mellett megoldani a problémát, ami persze minden esetben igaz, de itt különösen jól látszik.

K3.5

Milyen $y(x)$ mellett extrémális az alábbi funkcionál? A végpontban a deriváltat ne rögzítsük! (először vezessük le magasabb deriváltak esetén a határtagokat)

$$S = \int_0^1 (y''(x))^2 dx \quad (3.1.22)$$

Először nézzük meg, hogyan néz ki az Euler-Lagrange egyenlet és a határtagok akkor, ha a Lagrange-függvény tartalmaz magasabb deriváltakat is:

$$S = \int_{x_0}^{x_1} L(y, y'(x), y''(x)) dx \quad (3.1.23)$$

$$\delta S = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial L}{\partial y''} \delta y'' \right) dx \quad (3.1.24)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial L}{\partial y''} \delta y'' dx = \frac{\partial L}{\partial y''} \delta y' \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial L}{\partial y''} \right)' \delta y' dx \quad (3.1.25)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial L}{\partial y''} \delta y'' dx = \frac{\partial L}{\partial y''} \delta y' \Big|_{x_0}^{x_1} - \left(\left(\frac{\partial L}{\partial y''} \right)' \delta y \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial L}{\partial y''} \right)'' \delta y dx \right) \quad (3.1.26)$$

Így a hatás megváltozása:

$$\delta S = \left(\frac{\partial L}{\partial y'} - \left(\frac{\partial L}{\partial y''} \right)' \right) \delta y \Big|_{x_0}^{x_1} + \frac{\partial L}{\partial y''} \delta y' \Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \mathcal{E} \delta y dx = 0 \quad (3.1.27)$$

$$\mathcal{E} = \frac{\partial L}{\partial y} - \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right)' + \left(\frac{\partial L}{\partial y''} \right)'' \quad (3.1.28)$$

Ha szerepel második derivált a Lagrange függvényben, akkor négy peremfeltétel kell. Legyenek ezek $y(x_0)$, $y(x_1)$, $y'(x_0)$ és $y'(x_1)$. A megoldást visszaírva az Euler formula zérus, csak a határtagok maradnak. Rögzített végpontok és deriváltak esetén azok automatikusan nullát adnak. Mi történik, ha a végpontban nem rögzített a derivált:

$$dS = \frac{\partial L}{\partial y''} dy'(x_1) = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial y''} \Big|_{x=x_1} = 0 \quad (3.1.29)$$

Vissza feladatra:

$$L = (y'')^2 \quad (3.1.30)$$

$$\mathcal{E} = 0 = \frac{\partial L}{\partial y} - \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right)' + \left(\frac{\partial L}{\partial y''} \right)'' = 2y'''' \quad (3.1.31)$$

$$y(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (3.1.32)$$

Legyenek a feltételeink: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y(1) = 1$ és ne rögzítsük a végpontban a deriváltat. Így:

$$y(0) = d \rightarrow d = 0 \quad (3.1.33)$$

$$y'(0) = c \rightarrow c = 0 \quad (3.1.34)$$

Eddig:

$$y(x) = ax^3 + bx^2 \quad (3.1.35)$$

Maradék feltétel:

$$y(1) = a + b = 1 \rightarrow a = 1 - b \quad (3.1.36)$$

Így:

$$y(x) = (1 - b)x^3 + bx^2 \quad (3.1.37)$$

A korábbiak alapján, ha a végpontban szabad a derivált, akkor:

$$\left. \frac{\partial L}{\partial y''} \right|_{x=1} = 2y''|_{x=1} = 2(6(1 - b)x + 2b)|_{x=1} = 12(1 - b) + 4b = 0 \quad (3.1.38)$$

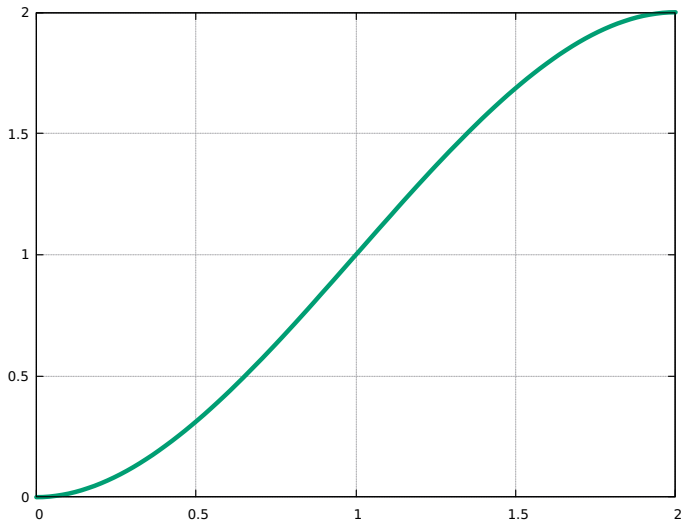
Tehát a második deriváltnak kell eltűnnie ebben az esetben a végpontban.

Így:

$$b = \frac{3}{2} \quad (3.1.39)$$

Tehát:

$$y(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \quad (3.1.40)$$



16. ábra. Megoldás rögzítetlen deriválttal a végpontban.

K3.6

Keressük meg az alábbi funkcionál extrémumát:

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y^2(1 - y'(x))^2 dx$$

Oldjk meg a problémát különböző határfeltételek mellett úgy, hogy

- a.) Görbék halmazán keressük a megoldást
- b.) Egyértékű $y(x)$ függvények halmazán keressük a megoldást

Görbék esete

Az első esetben bármely $x - y$ síkon vett görbék halmazán dolgozunk. Arra kell figyelni, hogy minden szakasza megoldása legyen az Euler-Lagrange egyenletnek azonos kanonikus energia mellett, hiszen annak meg kell maradnia, mivel a Lagrange-függvény nem függ expliciten az x -től. Ilyen görbét megadhatunk a konkrét differenciál-egyenletek megoldása nélkül is. Vegyük észre, hogy a hatása pozitív szemidefinit, tehát van globális minimuma. Ehhez tartozó megoldások triviálisan:

$$y(x) = 0 \quad y(x) = x + c \tag{3.1.41}$$

Ezeket zérus S tartozik. Mi a kanonikus energia?

$$E = py'(x) - L = \frac{\partial L}{\partial y'} y' - L = -2y'(x)y(x)^2(1 - y'(x)) - y(x)^2(1 - y'(x))^2 \tag{3.1.42}$$

Egyszerűsítés után

$$E = y(x)^2 (y'(x)^2 - 1) \tag{3.1.43}$$

Tehát a hatás globálisan minimalizáló megoldáshoz $E = 0$ tartozik. Tehát energiamegmaradást és a hatás minimalizáló függvényszakaszokat használva bármely két pont összeköthető a síkon, tehát bármely peremfeltétel kielégíthető. A probléma csak az, hogy előfordulhat, hogy ez a görbe többértékű és/vagy kilép az $[x_0, x_1]$ tartományról, amit vagy az integrál irányítottságával oldunk meg:

$$\int_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^a + \int_a^b + \int_b^{x_1} \tag{3.1.44}$$

ahol a és b tetszőleges valós számok, és a függvény $[x_0, a]$, $[a, b]$ és $[b, x_1]$ tartományokon egyértékű, vagy az eredeti probléma átparaméterezésével, hogy az alaphalmazunk már a hatás szintjén is a síkgörbék serege legyen:

$$y(x) \rightarrow y(t) \quad y'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad dx = \dot{x}dt \quad (3.1.45)$$

Így a hatás az új paraméterben:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} y^2(t) \left(1 - \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2 \dot{x}dt \quad (3.1.46)$$

Ez a formula nem függ x -től, így az ehhez tartozó kanonikus impulzus megmarad (mivel $F_x = 0$):

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = y(t)^2 \left(1 - \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2 + 2y(t)^2 \left(1 - \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) \dot{x} \frac{\dot{y}}{\dot{x}^2} = y(t)^2 \left(1 - \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}\right) \quad (3.1.47)$$

Az y -hoz tartozó kanonikus impulzus (ami nem marad meg):

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = -2y(t)^2 \left(1 - \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) \quad (3.1.48)$$

Mivel a Lagrange-függvény nem függ expliciten t -től, a kanonikus energia is megmarad:

$$E = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - L = \dot{x}y(t)^2 \left(1 - \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}\right) + 2\dot{y}y(t)^2 \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} - 1\right) - y(t)^2 \left(1 - \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}\right) \dot{x} = 0 \quad (3.1.49)$$

Tehát a kanonikus energia azonosan zérus (ez parametrizációs invariancia miatt van). Térjünk vissza a megmaradó impulzusra:

$$p_x = y(t)^2 \left(1 - \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}\right) \quad (3.1.50)$$

Ennek van két triviális megoldása:

$$y(t) = 0 \quad x(t) = f(t) \quad (3.1.51)$$

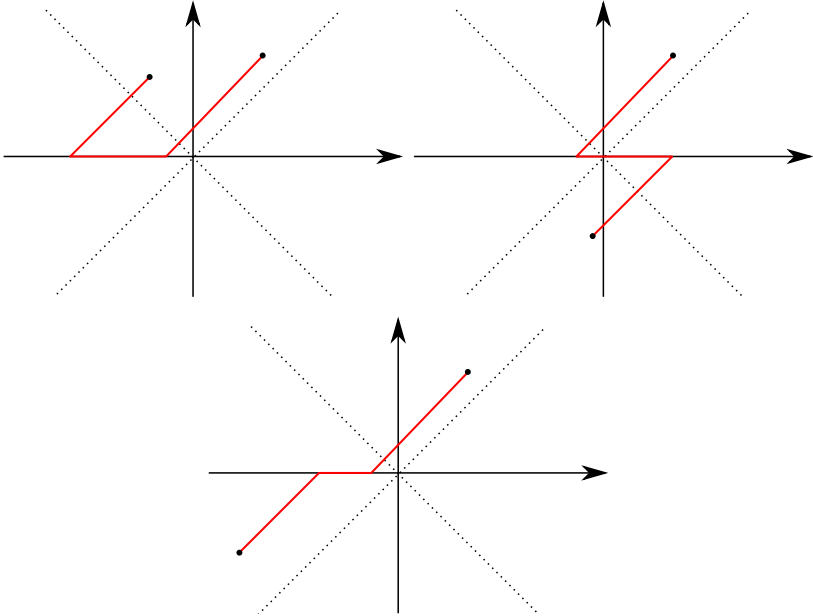
ahol $f(t)$ tetszőleges, nem zérus függvény, illetve:

$$y(t) = \pm At \quad x(t) = At \quad (3.1.52)$$

Továbbá nem triviális megoldásai:

$$y(t) = \sqrt{p_x} \operatorname{sh}(\alpha t) \quad x(t) = \sqrt{p_x} \operatorname{ch}(\alpha t) + B \quad (3.1.53)$$

Látható, hogy itt is kijön az $y = 0$, illetve $y = x$ alakú megoldás. Ezekkel a szakaszokkal összeköthejünk tetszőleges két pontot, hiszen a hatást ezek minimalizálják globálisan. Minden egyéb megoldás stacionárius, de nem globális minimum. Három szignifikánsan különböző megoldást mutat az alábbi ábra:



17. ábra. Három szignifikánsan különböző lehetőség. Ha a funkcionál alaphalmaza a síkgörbék, akkor mindig van megoldás, ami ráadásul globális minimum.

Egyértékű függvények esete

Eredeti Lagrange-függvény:

$$L = y(x)^2 (1 - y'(x))^2 \quad (3.1.54)$$

Euler-Lagrange egyenlet:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'(x)} = \frac{\partial L}{\partial y} \rightarrow -\frac{d}{dx} (y(x)^2 (1 - y'(x))) = y(x)(1 - y'(x))^2 \quad (3.1.55)$$

$$-2y(x)y'(x)(1-y'(x))+y(x)^2y''(x) = y(x)-2y(x)y'(x)+y(x)y'(x)^2 \quad (3.1.56)$$

$$y(1-y(x)y''(x)+y'(x)^2) = 0 \quad (3.1.57)$$

Látható, hogy a hatást minimalizáló $y(x) = 0$ és $y(x) = x + c$ valóban megoldása az Euler-Lagrange egyenletnek. További megoldásokhoz vezessük be a $z = y^2$ változót. Ekkor

$$z'(x) = 2y(x)y'(x) \quad z''(x) = 2y'(x)^2 + 2y(x)y''(x) \quad (3.1.58)$$

Így az egyenlet:

$$1 - \frac{1}{2}z''(x) = 0 \quad z(x) = x^2 + c_1x + c_2 \quad (3.1.59)$$

Tehát a megoldás:

$$y(x) = \pm\sqrt{x^2 + c_1x + c_2} \quad (3.1.60)$$

Feladat két tetszőleg pontot összekötni ezekkel a megoldásokkal, akár szakaszonként. Arra kell figyelni, hogy teljesüljön az energiamegmaradás és természetesen, hogy egyértékű legyen a függvényünk. Kanonikus energia adott megoldásra:

$$E = y(x)^2(y'(x)^2 - 1) = \frac{c_1^2}{4} - c_2 \quad (3.1.61)$$

Nézzük meg, hogy milyen görbékre lesz az energia zérus:

$$y(x) = \pm\sqrt{x^2 + c_1x - \frac{c_1^2}{4}} = \pm\sqrt{\left(x - \frac{c_1}{2}\right)^2} = \pm\left(x - \frac{c_1}{2}\right) \quad (3.1.62)$$

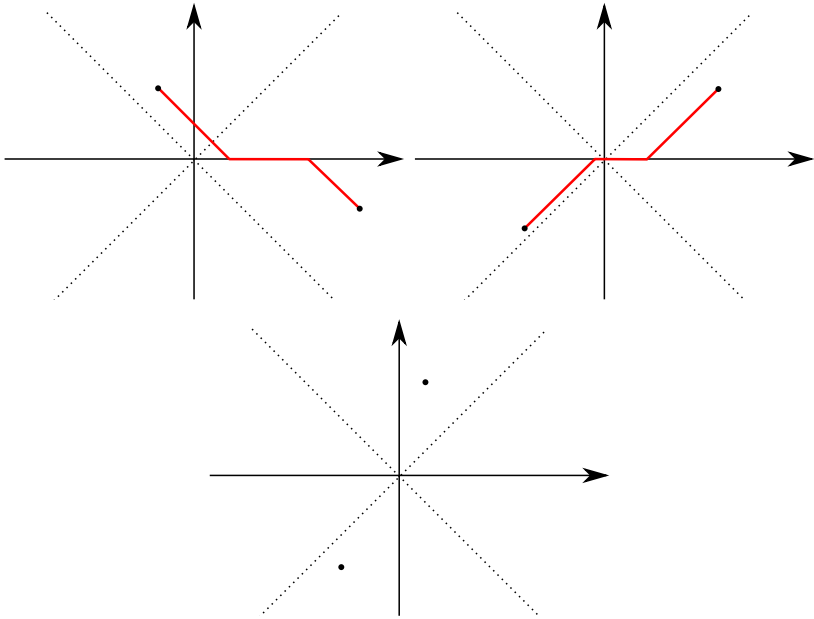
Tehát (ahogy azt vártuk) lineárisok adnak zérus energiát az $y(x) = 0$ mellett. Utolsó feltétel, hogy minden pontban teljesüljön az Euler-Lagrange egyelet, így az esetleges töréspontokban is. Amennyiben szakaszonként tesszük össze a megoldást, erre figyelni kell, hiszen ott a második derivált divergál. Euler-Lagrange egyenletben szereplő második deriváltas tagok $y(x)y''(x)$ szorozza. Kérdés, hogy ez összességében nem okoz-e gondot. Amennyiben a $y(x)y''(x)$ tag véges, akkor rendben van. Az biztos, hogy véges $y(x)$ -ra nem lesz jó, így ott nem törhet a függvény. Mi a helyzet $y(x) = 0$ -val? Ehhez vegyünk fel egy hiperbolát és origóra szimmetrikus hiberbolát:

$$y(x) = \sqrt{x^2 + c_2^2} \quad (3.1.63)$$

Most számoljuk ki a $y(x)y''(x)$ mennyiséget:

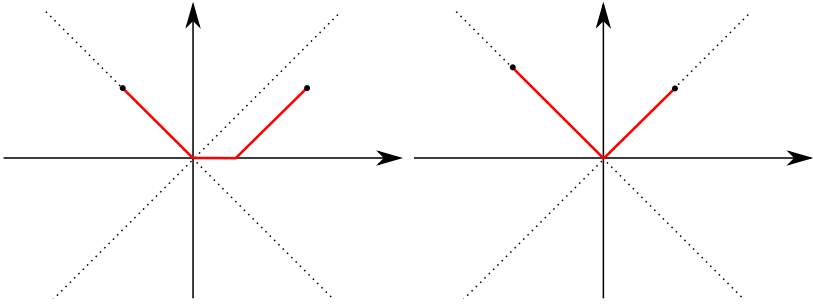
$$y(x)y''(x) = \sqrt{x^2 + c_2^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + c_2^2}} - \frac{x^2}{(x^2 + c_2^2)^{3/2}} \right) = 1 - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + c_2^2}} \quad (3.1.64)$$

Ez a mennyiség 1-hez tart, ha c_2 -vel zérushoz tartunk ($c_2 = 0$ esetén kapjuk a kérdéses töréspontot az x tengelyen), tehát összességében teljesül ekkor is az Euler-Lagrange egyenlet annak ellenére, hogy divergál a második derivált. Akkor most nincs más hátra, mint különböző esetekre összerakni a megoldást! A pontok helyzetétől függően két fő eset van: amikor mind a két pont x tengely felett vagy alatt van, illetve amikor különböző féltéren vannak. Ez azért van, mert y tengely mentén nem tolhatóak el a hiperbolák, míg x tengely mentén igen. Vizsgáljuk először az utóbbi esetet. Ekkora a hiperbolaágak nem lesznek jók, hiszen akkor többértékű lenne a görbe, tehát amennyiben lehetséges, a lineáris szakaszokkal és az $y(x) = 0$ -val kell összeraknunk a megoldást (hiberbolaágak és az egyenesek összefűzése nem lehetséges az energiamegmaradás miatt). Az egyértékűség megtartása miatt csak akkor tudunk megoldást megadni, ha a pontokat összekötő egyenes nem zár be nagyobb szöget az x tengellyel, mint 45° . Különböző eseteket mutatnak az alábbi ábrák:



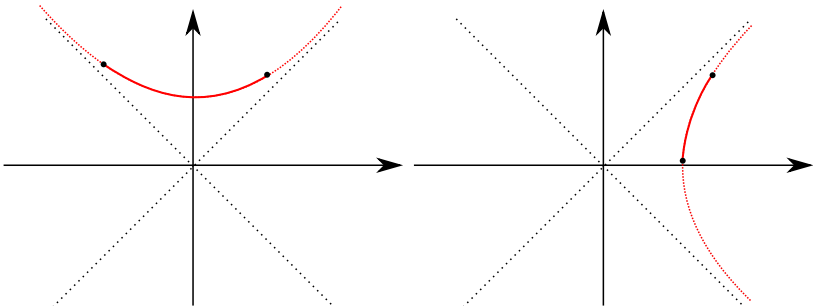
18. ábra. Három különböző lehetőség abban az esetben, ha a két pont két különböző térfélen van. A felső kettő esetben létezik összefüggő görbe. Ezek közül a jobb oldali esetben a hatás zérus, tehát globális minimum. Az alsó ábrán egy olyan elrendezést láthatunk, ahol nincs megoldása a problémának az egyértékű függvények terén.

Most nézzük meg azt az esetet, amikor egyik térfélen vannak a pontok. Ekkor minden esetben lesz jó megoldás, de van két szignifikánsan különböző eset. Jelöljük a pontokat $P_1(x_1, y_1)$ illetve $P_2(x_2, y_2)$ -vel. Egyik eset az, amikor a pontokra igaz lesz, hogy $|x_2 - x_1| \geq |y_1| + |y_2|$. Ilyenkor a lehetséges verziók:



19. ábra. Ilyenkor a két pontot össze lehet kötni lineáris és $y(x) = 0$ szakaszokkal. Határesetben (jobb oldal) két lineáris szakasz is elég. A lényeg, hogy az $y = 0$ helyen törhet csak a görbe!

Az utolsó eset, amikor $|x_2 - x_1| < |y_1| + |y_2|$. Ezen belül is két lehetőség van:



20. ábra. Megoldás hiperbola ágakkal. A bal oldali eset amikor a pontokat összekötő egyenes az x tengellyel 45° -nál kisebb szöget zár be, jobb oldali, amikor nagyobbat.

Tehát sikerült minden esetet megvizsgálni. Minden egyéb elrendezés elérhető az x tengely menti eltolással, vagy x tengelyre vett tükrözéssel.

Nevezetes variációs problémák

K3.7

Homogén gravitációs térben gurul egy test egy lejtőn. Milyen alakú legyen a lejtő, hogy $P(x_0, y_0)$ pontból $P(x_1, y_1)$ pontban a legrövidebb idő alatt elérjen? (Brahisztokron probléma)

Írjuk fel először a minimalizálandó idő formuláját:

$$S = \int dt = \int \frac{ds}{v} \quad (3.1.65)$$

Homogén gravitációs térben az energiamegmaradás az alábbi:

$$mgy_0 = mgy + \frac{m}{2}v^2 \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{2g(y_0 - y)} \quad (3.1.66)$$

Az ívhosszt pedig felírhatjuk a koordináták differenciáljaival:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad \rightarrow \quad ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (3.1.67)$$

Ezekkel már egy $y(x)$ -től függő funkcionált kapunk:

$$S[y(x)] = \int \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} dx \quad (3.1.68)$$

Mivel az integrandus nem függ expliciten x -től, ezért a kanonikus energia megmarad:

$$E = py' - L = \frac{\partial L}{\partial y'} y' - L = \frac{1}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} \left(\frac{y'(x)^2}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} - \sqrt{1 + y'(x)^2} \right) \quad (3.1.69)$$

Néhány átalakítás után:

$$E = -\frac{1}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} \frac{1}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \quad (3.1.70)$$

Ez már egy elsőrendű szeparálható differenciálegyenlet:

$$y'(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{2gE^2(y_0 - y)} - 1} \quad \rightarrow \quad \int dx = \int \frac{dy}{\pm \sqrt{\frac{1}{2gE^2(y_0 - y)} - 1}} \quad (3.1.71)$$

Az integrál elvégzéséhez végezzünk el néhány változócserét: $\tilde{y} = 2gE^2(y_0 - y)$, $dy = -\frac{d\tilde{y}}{2gE^2}$ Ezekkel:

$$x - x_0 = -\frac{1}{2gE^2} \int \frac{d\tilde{y}}{\pm\sqrt{\frac{1}{\tilde{y}} - 1}} = -\frac{1}{2gE^2} \int \frac{\sqrt{\tilde{y}}d\tilde{y}}{\pm\sqrt{1 - \tilde{y}}} \quad (3.1.72)$$

Újabb változócsere: $\tilde{y} = \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$, $d\tilde{y} = \sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)dt$ ($t \in [0 : 2\pi]$):

$$x - x_0 = \mp \frac{1}{2gE^2} \int \frac{|\sin\left(\frac{t}{2}\right)|}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}} \sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)dt$$

A \mp előjel az $y'(x)$ derivált előjeléből jön, ami pont ott vált, ahol a teljes integrandus ($t = n\pi$ -nél), így:

$$x - x_0 = \frac{1}{2gE^2} \int \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)dt = \frac{1}{4gE^2} \int (1 - \cos(t))dt$$

Elvégezve az integrált:

$$x - x_0 = \frac{1}{4gE^2} (t - \sin(t)) \quad (3.1.73)$$

Továbbá az y koordinátára:

$$y = y_0 - \frac{\tilde{y}}{2gE^2} = y_0 - \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{2gE^2} \rightarrow y - y_0 = \frac{1}{4gE^2} (\cos(t) - 1) \quad (3.1.74)$$

Egy t -vel paraméterezett görbét kapunk. Már csak a végpontok rögzítése van hátra. Könnyebbség kedvéért induljon a test az origóból:

$$y(t=0) = 0 \quad x(t=0) = 0 \quad (3.1.75)$$

Ehhez egyből látszik, hogy $x_0 = y_0 = 0$ szükséges. Tehát az így kapott görbe paraméteres alakja:

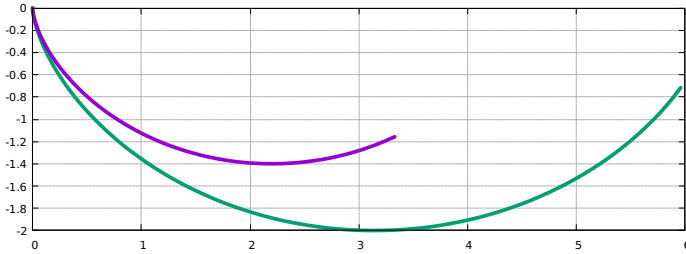
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{4gE^2} \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ \cos(t) - 1 \end{pmatrix} \quad (3.1.76)$$

A végpont rögzítése általában transzcendens egyenlethez vezet. Legyen t' -nél a görbe vége. Erre kívánjuk kiróni, hogy legyen x_1, y_1 pontban. Tehát megoldandó egyenletrendszer:

$$y(t') = y_1 = \frac{1}{4gE^2} (\cos(t') - 1)$$

$$x(t') = x_1 = \frac{1}{4gE^2} (t' - \sin(t')) \quad (3.1.77)$$

Ebben két rögzíthető paramétert rögzítünk: a kanonikus energiát és t' -t. Ezzel már jól definiált megoldást kapunk. Két különböző végponthoz rögzített megoldást mutat az alábbi ábra



21. ábra. Két különböző rögzített végpont esetén a megoldások.

Mi van, ha a végpontból, csak az egyik koordináta rögzített? Legyen ez az x_1 . Ekkor, mint láttuk, a kanonikus impulzusnak el kell tűnnie a végponton:

$$p(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \Big|_{x=x_1} = 0 \quad (3.1.78)$$

Ez csak akkor lehetséges, ha $y'(x)|_{x=x_1} = 0$, tehát a lejtő merőleges fut be a függőleges x_1 egyenesbe. Nézzük meg, hogy ez a görbe konkrétan hogyan néz ki:

$$dy = -\frac{1}{4gE^2} \sin t dt \quad (3.1.79)$$

$$dx = \frac{1}{4gE^2} (1 - \cos t) dt \quad (3.1.80)$$

Tehát az x szerinti derivált (aminek zérusnak kell lennie a végpontban):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{\cos t - 1} \quad (3.1.81)$$

Ez ott lesz zérus, ahogy \sin zérus, de a nevező nem:

$$t' = (2n + 1)\pi \quad (3.1.82)$$

Most ezt írjuk vissza görbe egyenletébe:

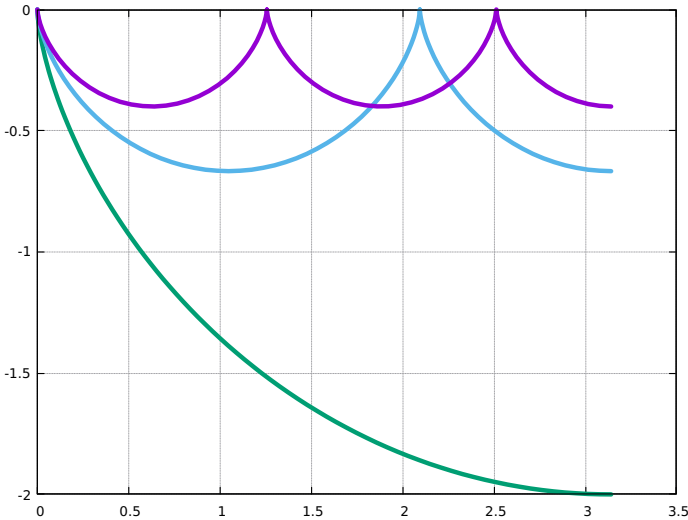
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4gE^2} \begin{pmatrix} (2n+1)\pi \\ -2 \end{pmatrix} \quad (3.1.83)$$

$$x_1 = \frac{(2n+1)\pi}{4gE^2} \rightarrow 2gE^2 = \frac{\pi}{2} \frac{2n+1}{x_1} \quad (3.1.84)$$

$$y_1 = -\frac{1}{2gE^2} = -\frac{2x_1}{(2n+1)\pi} \quad (3.1.85)$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{x_1}{(2n+1)\pi} \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ \cos(t) - 1 \end{pmatrix} \quad (3.1.86)$$

Az n egész számmal indexelt megoldásokból végtelen sok van. Ezek mindegyike stacionárius megoldás, de csak egyik ($n = 0$ -ás) a globális minimum. Belátható, hogy a többi nyeregpont a függvények terében.



22. ábra. Különböző stacionárius megoldásai a Brahisztokron problémának rögzítettlen y_1 koordináta esetén. Ebből csak a zöld görbe a globális minimum, a többi nyeregpont.

K3.8

Adott hosszúságú kötéllel akarjuk a legnagyobb területet körbeölelni úgy, hogy a két végpont az x tengelyen helyezkedik el. Milyen alakú a görbe?

A maximalizálandó funkcionál természetes maga a terület, ami mellett megjelenik a kötel hossza, mint kényszer. Ezt Lagrange multiplikatórral vesszük figyelembe:

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y(x)dx + \lambda \left(\int_0^L ds - l_0 \right) = \int_{x_0}^{x_1} y(x)dx + \lambda \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \quad (3.1.87)$$

Itt kihasználtuk az ívhosszra vonatkozó összefüggést ($ds^2 = dx^2 + dy^2$) A hosszt el lehet hagyni, hiszen az egy konstans, ne befolyásolja a variálás eredményét. Így a Lagrange függvény:

$$L = y(x) + \lambda \sqrt{1 + y'(x)^2} \quad (3.1.88)$$

Ez nem függ expliciten x -től, így a kanonikus energia állandó:

$$E = py' - L = \frac{\partial L}{\partial y'} y' - L = \lambda \frac{y'(x)^2}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} - \left(y(x) + \lambda \sqrt{1 + y'(x)^2} \right)$$

$$E = -y(x) - \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \quad (3.1.89)$$

Ez egy szeparálható differenciálegyenlet:

$$y'(x) = \sqrt{\frac{\lambda^2}{(E + y(x))^2} - 1} \quad (3.1.90)$$

$$\int dx = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{(E+y(x))^2} - 1}} dy \quad (3.1.91)$$

Vezessünk be egy új változót:

$$\tilde{y} = \frac{y + E}{\lambda} \quad \rightarrow \quad dy = \lambda d\tilde{y} \quad (3.1.92)$$

Így az integrál:

$$x + c = \lambda \int \frac{\tilde{y}}{\sqrt{1 - \tilde{y}^2}} d\tilde{y} = -\lambda \sqrt{1 - \tilde{y}^2} \quad (3.1.93)$$

Vegyük észre, hogy mind a két oldal határozatlan integrál, melyek konstansait egy konstansba (c) sűrítettük. A megoldás tehát:

$$(x + c)^2 = \lambda^2 (1 - \tilde{y}^2) \quad \rightarrow \quad (x + c)^2 + (y + E)^2 = \lambda^2 \quad (3.1.94)$$

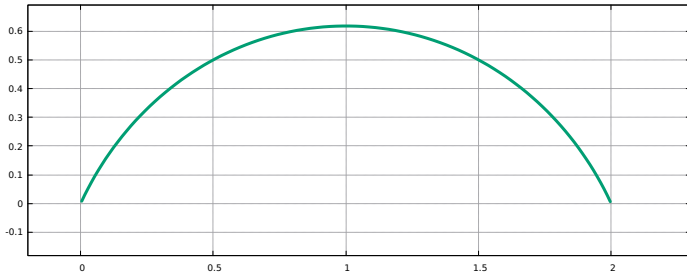
Az összes paraméter rögzítéséhez kell két peremfeltétel, illetve a kényszerre vonatkozó egyenlet megoldása. De vegyük észre, hogy a kör egyenletéből:

- λ a kör sugara
- $-c$ a középpont x koordinátája
- $-E$ a középpont y koordinátája

Legyen a kezdőpont az origóban, míg a végpont egy $(x_1, y_1 = 0)$ pontban. Így

$$c^2 + E^2 = \lambda^2 \quad (3.1.95)$$

Ebben az esetben (pl $c = -1$ és $E = 0.5$ esetén):



23. ábra. A megoldás egy körív. A szabad paramétereket geometriai megfontosásokkal tudjuk meghatározni.

Pusztán geometriai megfontosásokból ($x_0 = y_0 = y_1 = 0$ és véges rögzített l_0 és x_1 mellett):

$$-c = \frac{1}{2}x_1 \quad 2\pi\lambda = l_0 \quad c^2 + E^2 = \lambda^2 \quad (3.1.96)$$

Így a paraméterek a végpontok rögzítése után:

$$c = -\frac{1}{2}x_1 \quad E = \pm\sqrt{\lambda^2 - \frac{x_1^2}{4}} \quad (3.1.97)$$

Most már csak λ és l_0 kapcsolata van vissza. Az ábráról:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \left| \frac{c}{E} \right| \quad \varphi = 2 \operatorname{arctg} \left(\left| \frac{c}{E} \right| \right) \quad (3.1.98)$$

$$l_0 = \lambda \varphi = 2 \lambda \operatorname{arctg} \left(\left| \frac{c}{E} \right| \right) \quad (3.1.99)$$

Például $E = 0$ esetén:

$$l_0 = 2 \lambda \frac{\pi}{2} = \lambda \pi \quad (3.1.100)$$

Eddig úgy néz ki, hogy minden rendben van. De előfordul, hogy a kapott függvény többértékű lesz. Ez akkor fordul elő, ha a középpont y koordinátája pozitívvá jön ki. Ebben az esetben $y(x)$ -et visszaírva az eredeti integrálba csak az x_0 és x_1 közötti területet kapjuk meg, nem a teljes területet.

Rögzítetlen koordináták a végpontban

Vizsgáljuk meg, hogy mit történik, ha nem rögzítjük a végpont koordinátáit. Amennyiben az y_1 -et nem rögzítjük, a kanonikus impulzusnak kell eltűnnie a végpontban:

$$p = \lambda \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \rightarrow y'(x_1) = 0 \quad (3.1.101)$$

Tehát egy olyan kört kapunk, aminek érintője x_1 -ben vízszintes. Mi a helyzet akkor, ha az x_1 koordinátát nem rögzítjük? Ebben az esetben a kanonikus energiának kell zérusnak lennie a végpontban. Mivel a kanonikus energia megmarad a görbe mentén, így ez azt jelenti, hogy azonosan zérusnak kell lennie a görbe mentén a kanonikus energiának:

$$E = -y(x) - \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = 0 \rightarrow y(x) = -\frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = -\lambda \cos \varphi \quad (3.1.102)$$

ahol φ az érintő és az x tengely által bezárt szög. Mivel ennek a teljes görbe mentén teljesülnie kell a kanonikus energia megmaradása miatt, így $y = 0$ -nál az érintő függőleges, míg végpontban:

$$\cos \varphi = -\frac{y(x_1)}{\lambda} \quad (3.1.103)$$

Ez geometriailag azt jelenti, hogy a kör középpontja az x tengelyen van.

K3.9

Oldjuk meg a Didó királynő problémáját ívhossz paraméterezéssel rögzített $y(l) = y_1$ mellett.

Mivel a kényszer a kötéel hossza, ezért ha átírjuk ívhosszra a problémát, akkor az integrálási határ automatikusan tartalmazza a kényszert:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad \rightarrow \quad dx = ds\sqrt{1 - y'(s)^2} \quad (3.1.104)$$

Így avfukcionál:

$$\int_0^l y(s)\sqrt{1 - y'(s)^2} ds \quad (3.1.105)$$

Tehát a Lagrange-függvény:

$$L = y(s)\sqrt{1 - y'(s)^2} \quad (3.1.106)$$

Kanonikus energia itt is állandó:

$$E = py' - L = -y(s)\frac{y'(s)^2}{\sqrt{1 - y'(s)^2}} - y(s)\sqrt{1 - y'(s)^2} = -\frac{y(s)}{\sqrt{1 - y'(s)^2}} \quad (3.1.107)$$

$$y'(s) = \sqrt{1 - \left(\frac{y(s)}{E}\right)^2} \quad (3.1.108)$$

$$\int ds = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y(s)}{E}\right)^2}} dy \quad (3.1.109)$$

Vezessünk be új változót:

$$y(s) = E \sin u \quad \rightarrow \quad dy = E \cos u du \quad (3.1.110)$$

Így az integrál:

$$s - s_0 = E \int du = Eu = E \arcsin\left(\frac{y}{E}\right) \quad (3.1.111)$$

$$y(s) = E \sin\left(\frac{s}{E}\right) \quad (3.1.112)$$

Az s_0 -át zérusnak lehet venni. Az $x(s)$ -re:

$$\frac{dx}{ds} = \sqrt{1 - y'(s)^2} = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{s}{E}\right)} = \sin\left(\frac{s}{E}\right) \quad (3.1.113)$$

Tehát az ívhosszal paraméterezett változók:

$$y(s) = E \sin\left(\frac{s}{E}\right) \quad x(s) = -E \cos\left(\frac{s}{E}\right) + c \quad (3.1.114)$$

Ebből:

$$(x - c)^2 + y^2 = E^2 \quad (3.1.115)$$

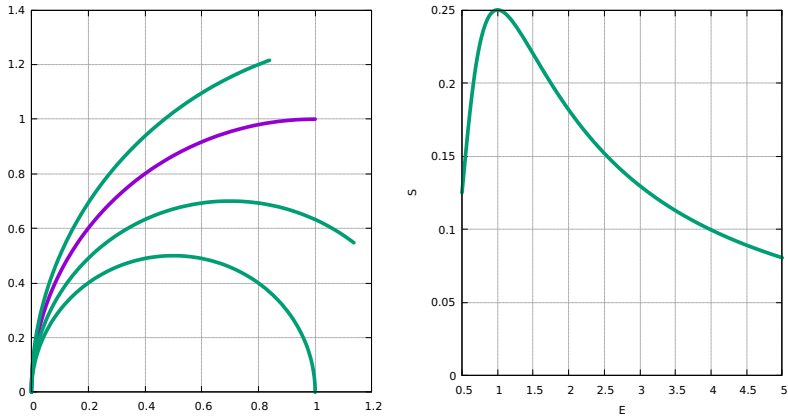
Ha a kezdőpont az origóban van, tehát $y(0) = 0$ és $x(0) = 0$, akkor

$$(x - E)^2 + y^2 = E^2 \quad (3.1.116)$$

Végpont rögzítése:

$$y(l) = y_1 = E \sin\left(\frac{l}{E}\right) \quad (3.1.117)$$

Így a lehetséges megoldások (különböző y_1 -ek, rögzített hossz) és a hozzájuk tartozó hatás:



Fontos észrevétel, hogy az összes megoldás függőlegesen indul az origóból. Ennek az az oka, hogy ez a paraméterezés nem tud a végpont x koordinátájának rögzítéséről (azt multiplikátorral kéne figyelembe venni), így automatikusan olyan megoldásokat kapunk, mint az $y(x)$ -es felírásnál abban az esetben, amikor rögzítetlen volt az x_1 koordináta. Ha az y_1 is rögzítetlen, negyedkör megoldást kapunk, ahol függőlegesen indult a görbe, és vízszintesen ér véget.

Fermat-elv

K3.10

Milyen pályán halad a fény sugar, ha a törésmutató $n(y) = n_0 \frac{d}{y}$?

A Fermat elv:

$$S = \int n(\mathbf{r}) ds \quad (3.1.118)$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \rightarrow ds = dx \sqrt{1 + y'(x)^2} \quad (3.1.119)$$

Így:

$$S = \int_{x_0}^{x_1} \frac{n_0 d}{y} \sqrt{1 + y'(x)^2} dy \quad (3.1.120)$$

A Lagrange-függvény:

$$L = \frac{n_0 d}{y} \sqrt{1 + y'(x)^2} \quad (3.1.121)$$

Kanonikus mennyiségek:

$$p = \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{n_0 d}{y} \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \quad (3.1.122)$$

$$F = \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{n_0 d}{y^2} \sqrt{1 + y'(x)^2} \quad (3.1.123)$$

$$E = py'(x) - L = \frac{n_0 d}{y} \frac{y'(x)^2}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} - \frac{n_0 d}{y} \sqrt{1 + y'(x)^2} = -\frac{n_0 d}{y} \frac{1}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \quad (3.1.124)$$

Az energia megmarad, így abból a képletből ki tudunk indulni:

$$y^2(1 + y'(x)^2) = \frac{n_0^2 d^2}{E^2} \quad (3.1.125)$$

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{n_0^2 d^2}{E^2} \frac{1}{y^2} - 1} \quad (3.1.126)$$

$$dx = \frac{1}{\pm \sqrt{\frac{n_0^2 d^2}{E^2} \frac{1}{y^2} - 1}} dy = \frac{y}{\pm \sqrt{\frac{n_0^2 d^2}{E^2} - y^2}} dy \quad (3.1.127)$$

Elvégezve az integrálokat:

$$x + c = \pm \sqrt{\frac{n_0^2 d^2}{E^2} - y^2} \quad (3.1.128)$$

Átrendezés után az eredmény:

$$(x + c)^2 + y^2 = \frac{n_0^2 d^2}{E^2} \quad (3.1.129)$$

Tehát a pálya mindig egy olyan körön van, aminek a középpontja az x tengelyen helyezkedik el.

K3.11

Milyen pályán halad a fény sugar, ha a törésmutató $n(r) = n_0 \frac{R}{r}$?

Ebben az esetben a hatást érdemes átfogalmazni polár koordinátákra. Ehhez használjuk fel, hogy az ívelem négyzete:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad (3.1.130)$$

Így a hatás:

$$\begin{aligned} S &= \int n(\mathbf{r}) ds = n_0 R \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}}{r} d\varphi = \\ &= n_0 R \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{1 + \frac{r'(\varphi)^2}{r(\varphi)^2}} d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} L d\varphi \end{aligned} \quad (3.1.131)$$

Erről már most látszik, hogy a globális minimum az origó középpontú körökhöz tartozik, hiszen azokra $r'(\varphi) = 0$. Az integrandus nem függ a szögtől expliciten, így a kanonikus energia megmarad:

$$\begin{aligned} E &= pr'(\varphi) - L = \frac{\partial L}{\partial r'(\varphi)} r'(\varphi) - L = \\ &= \frac{r'(\varphi)^2 / r(\varphi)^2}{\sqrt{1 + \frac{r'(\varphi)^2}{r(\varphi)^2}}} - \sqrt{1 + \frac{r'(\varphi)^2}{r(\varphi)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r'(\varphi)^2}{r(\varphi)^2}}} \end{aligned} \quad (3.1.132)$$

Tehát a kanonikus energia garantáltan a $[-1, 0]$ tartományon lehet csak. A kapott egyenlet egy szeparálható differenciálegyenlet:

$$r'(\varphi) = r(\varphi) \sqrt{\frac{1}{E^2} - 1} = c r(\varphi) \quad c \geq 0 \quad (3.1.133)$$

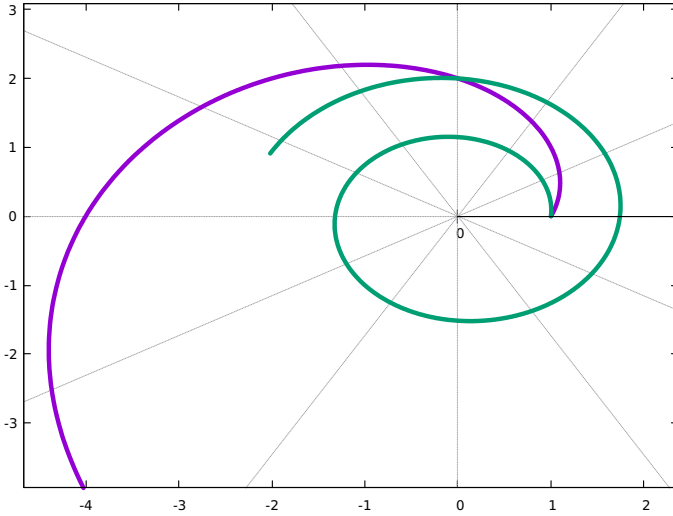
Ennek megoldása exponenciális:

$$r(\varphi) = A \exp(c\varphi) \quad (3.1.134)$$

A peremfeltétel illesztésénél figyelni kell arra, hogy a síkon egy pontra a szögben van egy additív $2\pi n$ szabadság, ahol n egész szám, tehát több megoldás is lehetséges. Ebben az esetben az integrálási határnál is ezt figyelembe kell venni ($\varphi_1 \rightarrow \varphi_1 + 2\pi n$). Legyen a síkon két pont a $P_1(1, 0)$ és $P_2(0, 2)$. Ezekre

rendre $r(\varphi = 0) = 1$ és $r(\varphi = \pi/2 + 2\pi n) = 2$. Természetesen a kezdőpontnál is lehetne egy 2π eltolás, de a lényeg, hogy a két szög különbségében lehet egy additív $2\pi n$ tag. Ezekkel:

$$A = 1 \quad A \exp(c(\pi/2) + c2\pi n) = 2 \rightarrow c = \frac{2}{\pi} \frac{\ln 2}{4n + 1} \quad (3.1.135)$$



24. ábra. Síkon elhelyezkedő két pont közötti lehetséges fényutak. A lila görbe tartozik $n = 0$ -hoz, a zöld az $n = 1$ -hez.

Természetesen a hatás globális minimuma az $n = 0$ megoldás. Tisztán matematikailag (ha nem tudjuk, hogy a φ egy szöveget jelöl), akkor maga a már $r(\varphi)$ -re felírt integrál egyértelmű az $r(\varphi_0) = r_0$ és $r(\varphi_1) = r_1$ peremfeltételekkel. Több megoldás azért lehetséges, mert az eredeti integrál viszont egy sík két pontja közötti görbére vett integrál, aminek szélsőértékére ilyen módon több megoldás is kijöhet.

Lagrange-i mechanika

K3.12

Egy m tömegű test az x tengelyen mozoghat. Rögzítsünk ehhez a testhez egy l_0 nyugalmi hosszúságú, k direkciós eresjű rugót úgy, hogy a rugó másik vége az y tengelyen van, d magasságban. Hol vannak az egyensúlyi helyzetek, és mik az ezek körüli kis rezgések frekvenciái?

A minimalizálandó hatás:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}) dt \quad (3.1.136)$$

ahol

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} \left(\sqrt{x^2 + d^2} - l_0 \right)^2 \quad (3.1.137)$$

Kanonikus mennyiségek, amik immárom már a valós fizikai mennyiségek:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad (3.1.138)$$

$$F = \frac{\partial L}{\partial x} = -k \left(\sqrt{x^2 + d^2} - l_0 \right) \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}} = -kx \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + d^2}} \right) \quad (3.1.139)$$

Vizsgáljuk az egyensúlyi helyzet körüli mozgást ($l_0 > d$ esetén), legyen az egyensúlyi pont x_0 . Vezessünk be egy új változót, ami az ettől való eltérést méri:

$$x = x_0 + \Delta x \quad x_0^2 = l_0^2 - d^2 \quad (3.1.140)$$

Így a gyökös kifejezés:

$$\frac{l_0}{\sqrt{(x_0 + \Delta x)^2 + d^2}} = \frac{l_0}{\sqrt{l_0^2 + \Delta x^2 + 2\sqrt{l_0^2 - d^2}\Delta x}} \quad (3.1.141)$$

$$\frac{l_0}{\sqrt{(x_0 + \Delta x)^2 + d^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Delta x^2}{l_0^2} + 2\sqrt{1 - (d/l_0)^2} \frac{\Delta x}{l_0}}} \quad (3.1.142)$$

Nézzük meg, hogy a kis rezgések esetén mi történik, fejtsünk sorba mindent Δx szerint:

$$\frac{l_0}{\sqrt{(x_0 + \Delta x)^2 + d^2}} \simeq 1 - \frac{1}{l_0} \sqrt{1 - (d/l_0)^2} \Delta x = 1 - \sqrt{l_0^2 - d^2} \frac{\Delta x}{l_0^2} \quad (3.1.143)$$

Így az erő:

$$F = -kx \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + d^2}} \right) = -k(x_0 + \Delta x) \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{(x_0 + \Delta x)^2 + d^2}} \right) \quad (3.1.144)$$

Sorfejtés után tartjuk meg csak lineáris rendig a tagokat:

$$F \simeq -kx_0 \frac{\sqrt{l_0^2 - d^2}}{l_0^2} \Delta x = -k \left(1 - \frac{d^2}{l_0^2} \right) \Delta x \quad (3.1.145)$$

És akkor az Euler-Lagrange egyenlet ($\dot{p} = F$):

$$\Delta \ddot{x} = -\frac{k}{m} \left(1 - \frac{d^2}{l_0^2} \right) \Delta x \quad (3.1.146)$$

Harmonikus rezgőmozgás, melynek frekvenciája:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{d^2}{l_0^2} \right)} \quad (3.1.147)$$

Mi a helyzet akkor, ha $l_0 < d$? Ekkor az egyensúlyi pont az $x_0 = 0$. Ekkor a képleteket $x = 0$ körül kell sorbafejteni:

$$\frac{l_0}{\sqrt{x^2 + d^2}} \simeq \frac{l_0}{d} \quad (3.1.148)$$

Így az erő lineáris rendig:

$$F = -kx \left(1 - \frac{l_0}{d} \right) \quad (3.1.149)$$

Tehát a kis rezgések frekvenciája:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{l_0}{d} \right)} \quad (3.1.150)$$

Látható, hogy mind a két esetben $l_0 = d$ -re zérus frekvenciát kapunk. Ennek az az oka, hogy ilyenkor a sorfejtésben a lineáris tag zérus, a mozgás leírásához magasabb rendekre lenne szükség, tehát a rezgés anharmonikus lesz.

K3.13

Adott egy m_2 tömegű, l hosszú matematikai inga, aminek a felfüggesztési pontja egy m_1 tömegű test, aminek az x tengely mentén mozoghat szabadon. Mekkora az inga frekvenciája kis kitérések esetén?

Szabadsági fokok száma: 2. Legyenek az általános koordináták a felső tömeg x_1 koordinátája, és az inga bezárt szöge a függőlegessel. Kinetikus energiák:

$$K_1 = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 \quad K_2 = \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \quad (3.1.151)$$

ahol (ha y tengely lefele néz)

$$x_2 = x_1 + l \sin \varphi \quad y_2 = l \cos \varphi \quad (3.1.152)$$

így

$$K_2 = \frac{m_2}{2} \left((\dot{x}_1 + l\dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + (l\dot{\varphi} \sin \varphi)^2 \right) = \frac{m_2}{2} (\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_1\dot{\varphi}l \cos \varphi + l^2\dot{\varphi}^2) \quad (3.1.153)$$

A potenciális energiák:

$$V_1 = 0 \quad V_2 = -m_2gl \cos \varphi \quad (3.1.154)$$

A teljes Lagrange függvény:

$$L = K_1 + K_2 - V_1 - V_2 \quad (3.1.155)$$

Tehát

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_1\dot{\varphi}l \cos \varphi + l^2\dot{\varphi}^2) + m_2gl \cos \varphi \quad (3.1.156)$$

Először írjuk fel az x_1 -hez tartozó kanonikus mennyiségeket:

$$F_{x_1} = \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \quad (3.1.157)$$

$$p_{x_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1 + m_2(\dot{x}_1 + l\dot{\varphi} \cos \varphi) = \text{konst.} \quad (3.1.158)$$

A szöghöz tartozó mennyiségek:

$$F_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2\dot{x}_1\dot{\varphi}l \sin \varphi - m_2gl \sin \varphi \quad (3.1.159)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 \dot{x}_1 l \cos \varphi + m_2 l^2 \dot{\varphi} \quad (3.1.160)$$

$$\dot{p}_\varphi = m_2 \ddot{x}_1 l \cos \varphi - m_2 \dot{x}_1 l \dot{\varphi} \sin \varphi + m_2 l^2 \ddot{\varphi} \quad (3.1.161)$$

Így a szöghöz tartozó Euler-Lagrange egyenlet:

$$\ddot{x}_1 \cos \varphi + l \ddot{\varphi} = -g \sin \varphi \quad (3.1.162)$$

Ugye a p_{x_1} impulzus megmaradt, tehát a deriváltja zérus:

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 l (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = 0 \quad (3.1.163)$$

Ez így akkor egy másodrendű, csatolt differenciálegyenlet rendszer. Hogy lássuk megoldást, nézzük meg a kis rezgések frekvenciáját! Ehhez:

$$\varphi \ll 1 \quad \sin \varphi \simeq \varphi \quad \cos \varphi \simeq 1 \quad (3.1.164)$$

Most az x_1 -re vonatkozó egyenletből fejezzük ki x_1 -et:

$$\ddot{x}_1 = -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2} (\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 \varphi) \quad (3.1.165)$$

Ezt írjuk vissza a szögre vonatkozó egyenletbe:

$$-\frac{m_2}{m_1 + m_2} (\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 \varphi) + \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \varphi \quad (3.1.166)$$

Vagyis:

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\varphi}^2 \varphi + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \varphi \quad (3.1.167)$$

Amennyiben elég kicsi az amplitudó, akkor a mozgás harmonikus lesz. Ebben az esetben igaz, hogy a $\dot{\varphi}^2$ -es tagok is el lehet hanyagolni, hiszen:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{\omega^2 \varphi} \sim A \ll 1 \quad (3.1.168)$$

Így

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \varphi \rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l} \varphi \quad (3.1.169)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l}} \quad (3.1.170)$$

Megjegyzés: magasabb szabadsági fokú rendszerek esetében az általános eljárás az, hogy mátrixos alakban írjuk fel a differenciálegyenletet, majd kvadratikusan alakig sorbafejtjük a potenciált, ahol így szintén megjelenik egy mátrix $\mathbf{q}A\mathbf{q}$ alakban. Az A és a tömegmátrix inverzének a segítségével általánosan kifejezhetőek a rendszer sajátfrekvenciái, amiből annyi lesz, amennyi a szabadsági fokok száma volt. Jelen esetben ez megkerülhető volt azzal, hogy az egyik változót visszaírtuk a másikra vonatkozó egyenletbe, így nyervén egy egyváltozós differenciálegyenletet. Vegyük észre azt is, hogy jelen esetben a két sajátfrekvencia degenerált, hiszen lineáris rendig igaz, hogy $\ddot{x} \sim \ddot{\varphi}$.

K3.14

Mozogjon egy q töltésű részecske elektromágneses térben. Legyenek a terek $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$ és $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. Milyen pályán halad a részecske?

Lagrange függvény:

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{r}}|^2 + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \dot{\mathbf{r}} - e\Phi(\mathbf{r}, t) \quad (3.1.171)$$

Kanonikus erő és impulzus:

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial r_i} = \sum_j \frac{e}{c} (\partial_i A_j) \dot{r}_j - e \partial_i \Phi \quad (3.1.172)$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = m \dot{r}_i + \frac{e}{c} A_i \quad (3.1.173)$$

$$\dot{p}_i = m \ddot{r}_i + \frac{e}{c} \sum_j \partial_j A_i \dot{r}_j + \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \quad (3.1.174)$$

Mozgásegyenletek:

$$F_i = \dot{p}_i \quad (3.1.175)$$

$$m \ddot{r}_i + \frac{e}{c} \sum_j \partial_j A_i \dot{r}_j + \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} = \sum_j \frac{e}{c} (\partial_i A_j) \dot{r}_j - e \partial_i \Phi \quad (3.1.176)$$

$$m \ddot{r}_i = -e \partial_i \Phi + \frac{e}{c} \sum_j (\partial_i A_j - \partial_j A_i) \dot{r}_j - \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \quad (3.1.177)$$

Legyen

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \rightarrow (\partial_i A_j - \partial_j A_i) = \epsilon_{ijk} B_k \quad (3.1.178)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi \quad (3.1.179)$$

Így a teljes mozgásegyenlet:

$$m \ddot{\mathbf{r}} = e \mathbf{E} + \frac{e}{c} \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \quad (3.1.180)$$

Legyen mondjuk:

$$\mathbf{B} = (0, 0, B) \quad \mathbf{E} = (E, 0, 0) \quad \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} = (y\dot{B}, -x\dot{B}, 0) \quad (3.1.181)$$

Ekkor:

$$\ddot{x} = \frac{eE}{m} + \frac{eB}{mc}\dot{y} \quad (3.1.182)$$

$$\ddot{y} = -\frac{eB}{mc}\dot{x} \rightarrow \dot{y} = -\frac{eB}{mc}\dot{x} \rightarrow \ddot{x} = -\frac{mc}{eB}\dot{y} \quad (3.1.183)$$

Visszaírva:

$$-\frac{mc}{eB}\dot{y} = \frac{eE}{m} + \frac{eB}{mc}\dot{y} \quad (3.1.184)$$

$$\dot{y} = -\frac{e^2EB}{m^2c} - \frac{e^2B^2}{m^2c^2}\dot{y} = -c_1^2 - c_2^2\dot{y} \quad (3.1.185)$$

$$\dot{x} = -\frac{e^2B^2}{m^2c^2}\dot{x} = -c_2^2\dot{x} \quad (3.1.186)$$

A megoldáshoz számoljuk ki először a sebességeket:

$$\ddot{v}_y = -c_1^2 - c_2^2v_y = -c_2^2\left(\frac{c_1^2}{c_2^2} + v_y\right) \quad (3.1.187)$$

$$\ddot{v}_x = -c_2^2v_x \quad (3.1.188)$$

Ezekből:

$$v_x(t) = A_x \cos(c_2t) + B_x \sin(c_2t) \quad (3.1.189)$$

$$v_y(t) = A_y \cos(c_2t) + B_y \sin(c_2t) - \frac{c_1^2}{c_2^2} \quad (3.1.190)$$

Már csak egyet kell integrálni:

$$x(t) = A_x \frac{\sin(c_2t)}{c_2} - B_x \frac{\cos(c_2t)}{c_2} + C_x \quad (3.1.191)$$

$$y(t) = A_y \frac{\sin(c_2t)}{c_2} - B_y \frac{\cos(c_2t)}{c_2} - \frac{c_1^2}{c_2^2}t + C_y \quad (3.1.192)$$

Illesszük az alábbi kezdőfeltételeket:

$$x(0) = 0 \quad y(0) = 0 \quad x'(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \quad (3.1.193)$$

$$x'(0) = A_x = 0 \quad (3.1.194)$$

$$y'(0) = A_y - \frac{c_1^2}{c_2^2} = 0 \rightarrow A_y = \frac{c_1^2}{c_2^2} \quad (3.1.195)$$

$$x(0) = -\frac{B_x}{c_2} + C_x = 0 \rightarrow C_x c_2 = B_x \quad (3.1.196)$$

$$y(0) = -\frac{B_y}{c_2} + C_y = 0 \rightarrow C_y c_2 = B_y \quad (3.1.197)$$

Így az eredmény:

$$x(t) = -B_x \frac{\cos(c_2 t)}{c_2} + \frac{B_x}{c_2} = \frac{B_x}{c_2} (1 - \cos(c_2 t)) \quad (3.1.198)$$

$$y(t) = \frac{c_1^2}{c_2^2} \frac{\sin(c_2 t)}{c_2} - B_y \frac{\cos(c_2 t)}{c_2} - \frac{c_1^2}{c_2^2} t + \frac{B_y}{c_2} \quad (3.1.199)$$

Még maradt két konstans. Ezeket a kezdeti differenciálegyenletek rögzítik:

$$\ddot{y} = -\frac{eB}{mc} \dot{x} \rightarrow -\frac{c_1^2}{c_2} \sin(c_2 t) + B_y c_2 \cos(c_2 t) = -\frac{eB}{mc} B_x \sin(c_2 t) \quad (3.1.200)$$

Ennek minden időpillanatra teljesülnie kell. Így:

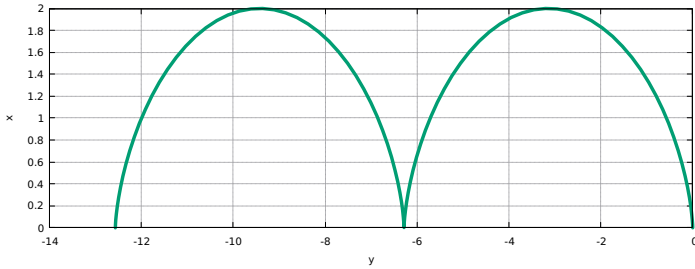
$$B_y = 0 \quad B_x = \frac{c_1^2}{c_2} \frac{mc}{eB} = \frac{c_1^2}{c_2^2} \quad (3.1.201)$$

Így a kezdőfeltételekhez illesztett megoldás:

$$x(t) = \frac{Ec}{B\omega} (1 - \cos(\omega t)) \quad y(t) = \frac{Ec}{B\omega} (\sin(\omega t) - t) \quad (3.1.202)$$

ahol

$$\omega = \frac{eB}{mc} \quad (3.1.203)$$



25. ábra. Töltött részecske pályája elektromágneses térben. A bejárt görbe éppen ciklois.

Gyakorló feladatok

F3.1 Keressük meg az alábbi hatásokat extremalizáló függvényeket!

a.) $S = \int_0^1 (y^2 - y'^2) dx \quad y(0) = 0 \quad y(1) = 1$

b.) $S = \int_0^1 y y'^2 dx \quad y(0) = p > 0 \quad y(1) = q > 0$

F3.2 Oldjuk meg a brahisztokron problémát úgy, hogy

a.) Csak az x_1 koordináta rögzített!

b.) Csak az y_1 koordináta rögzített!

c.) A végpont legyen rajta az $f(x) = \alpha(1 - x)$ egyenesen!

F3.3 Milyen alakú egy gravitációs térben levő súlyos kötél alakja, ha kezdőpontja az origóban van, végpontja pedig x_1 mentén függőlegesen egy sínen mozoghat?

F3.4 Milyen alakú a forgatott ugrókötél? Hanyagoljuk el a gravitációt, és tekintsük a végpontokat rögzítettnek!

F3.5 Milyen potenciál mellett lesz a leggyorsabb pálya láncgörbe alakú?

F3.6 Haladjon egy fénysugár az alábbi törésmutatójú közegben:

$$n(y) = n_0 \sqrt{1 - (y/R)^2}$$

Milyen pályán halad a sugár, ha a fényt az origóból indítjuk az x tengellyel α szöget bezáró irányban?

F3.7 Igazoljuk, hogy $n(r) \sim 1/\sqrt{r}$ törésmutató mellett minden fényút parabola!

F3.8 Írjuk fel a gömbingára vonatkozó mozgásegyenleteket! Milyen mennyiségek lesznek időben állandók?

F3.9 Írjuk fel egy olyan ingának a mozgásegyenleteit, ahol a szálat egy rugóval helyettesítjük!

F3.10 Milyen alakú egy súlyos kötél homogén gravitációs mezőben? Oldjuk meg a problémát ívhossz paraméterezéssel!

F3.11 Oldjuk meg a Brahisztokron problémát ívhossz paraméterezéssel!

F3.12 Egy közeg törésmutatója az alábbi

$$n(r) = n_0 \left(1 + \frac{r}{r_0} \right)^n \quad (3.2.204)$$

Milyen pályájú a fénysugár? Oldjuk meg tetszőleges pozitív egész n -re!

F3.13 Adott két sín egymástól d távolságra. Mindegyiken mozoghat a sín mentén egy-egy M tömegű test amiket egy l_0 nyugalmi hosszú D rugóállandójú rugó köt össze.

- a.) Adjuk meg $\frac{d}{l_0}$ függvényében a stabil és instabil egyensúlyi helyzeteket!
- b.) Számoljuk ki a stabil egyensúlyi helyzetek körüli kis rezgések frekvenciáját!
- c.) Mi a helyzet $l_0 = d$ esettel?

(Tipp: keressünk olyan paraméterezést, ahol látszik, mi a megmaradó mennyiség!)

F3.14 Az oszcillátor esetén a stacionárius pálya nem feltétlenül globális minimum, amit könnyedén be lehet látni, ha a teljes periódusidőre integráljuk a hatást. Azonban ha kis Δt tartományra integrálunk, akkor már globális minimum! Vizsgáljuk meg Δt függvényében stacionárius pont jellegének viselkedését! Ha kell számoljuk ki hozzá a hatás második variációját!

F3.15 Egy gödörben egy test periódusideje független az amplitúdótól. Milyen alakú a gödör?

Egydimenziós mozgások

Szükséges ismeretek és formulák

Periódusidő, fázistér és bifurkáció

K4.1

Mekkora a

$$V(x) = -\frac{V_0}{\operatorname{ch}^2(\alpha x)}$$

potenciálban mozgó test periódusideje? (Tegyük fel, hogy $0 > E > -V_0$)

Ismert, hogy a periódusidőt az alábbi módon kell kiszámolni:

$$T = \sqrt{2m} \int_{-x_0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = 2\sqrt{2m} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \quad (4.1.1)$$

Kihasználtuk, hogy a potenciál szimmetrikus. A fordulópont ott van, ahol az energia megegyezik a potenciális energiával:

$$E = -\frac{V_0}{\operatorname{ch}^2(\alpha x_0)} \quad \rightarrow \quad x_0 = \pm \frac{1}{\alpha} \operatorname{arch} \sqrt{-\frac{V_0}{E}} \quad (4.1.2)$$

Beírva az energiát és a potenciális energiát:

$$T = \sqrt{\frac{8m}{V_0}} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{\operatorname{ch}(\alpha x)} - \frac{1}{\operatorname{ch}(\alpha x_0)}}} \quad (4.1.3)$$

Eszközöljünk egy változócsere:

$$z = \operatorname{ch}(\alpha x)$$

$$dz = \alpha \operatorname{sh}(\alpha x) dx$$

$$\operatorname{ch}(0) = 1 \quad z_0 = \operatorname{ch}(x_0)$$

$$dx = \frac{dz}{\alpha \operatorname{sh}(\alpha x)} = \frac{1}{\alpha} \frac{dz}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(\alpha x) - 1}} = \frac{1}{\alpha} \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} \quad (4.1.4)$$

Ezeket írjuk vissza, majd néhány algebrai átalakítás után:

$$T = \sqrt{\frac{8m}{\alpha^2 V_0}} \int_1^{z_0} \frac{z_0 z}{\sqrt{z_0^2 - z^2} \sqrt{z^2 - 1}} dz \quad (4.1.5)$$

Újabb változócsere:

$$\begin{aligned} u &= z^2 \\ u_0 &= z_0^2 \quad 1^2 = 1 \\ du &= 2z dz \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

$$T = \sqrt{\frac{8m}{\alpha^2 V_0}} \frac{1}{2} \int_1^{u_0} \frac{\sqrt{u_0}}{\sqrt{u-1} \sqrt{u_0-u}} du \quad (4.1.7)$$

Most csináljuk a változóban egy sima eltolást ($u - 1 = w$):

$$T = \sqrt{\frac{2m}{V_0}} \frac{1}{\alpha} \int_0^{w_0} \frac{\sqrt{w_0 + 1} dw}{\sqrt{w} \sqrt{w_0 - w}} \quad (4.1.8)$$

És még egy változócsere:

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{w} \\ ds &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{w}} dw = \frac{dw}{2s} \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

$$T = \sqrt{\frac{2m}{V_0}} \frac{1}{\alpha} \sqrt{1 + \frac{1}{s_0^2}} \int_0^{s_0} \frac{2ds}{\sqrt{1 - \frac{s^2}{s_0^2}}} \quad (4.1.10)$$

Utolsó változócsere:

$$\begin{aligned} \frac{s}{s_0} &= \sin \epsilon \\ \sin(0) = 0 \quad \sin(\epsilon_0) &= \frac{s_0}{s_0} = 1 \rightarrow \epsilon_0 = \frac{\pi}{2} \\ \frac{ds}{s_0} &= \cos \epsilon d\epsilon \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

$$T = \sqrt{\frac{8m}{V_0}} \frac{1}{\alpha} \sqrt{s_0^2 + 1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\epsilon = \frac{2\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{m}{-2E}} \quad (4.1.12)$$

Ahol felhasználtuk, hogy:

$$\sqrt{s_0^2 + 1} = \operatorname{ch}(\alpha x_0) \quad E = -\frac{V_0}{\operatorname{ch}^2(\alpha x_0)} \quad (4.1.13)$$

Így a periódusidő (tudván, hogy az energia negatív):

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \quad (4.1.14)$$

Erre a megoldásra más módon is juthatunk, persze ahhoz meg kell sejteni a megfelelő koordinátatranszformációt. Írjuk fel az energiát:

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{V_0}{\operatorname{ch}^2(\alpha x)} \quad (4.1.15)$$

Eszközöljük az alábbi változócsere:

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{sh}(\alpha x) \\ 1 + y^2 &= \operatorname{ch}(\alpha x) \\ dy &= \alpha \operatorname{ch}(\alpha x) dx \\ \dot{x} &= \frac{1}{\alpha \operatorname{ch}(\alpha x)} \dot{y} \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

Ezekkel:

$$E = \frac{m}{2} \frac{\dot{y}^2}{1 + y^2} - \frac{V_0}{1 + y^2} \quad (4.1.17)$$

$$V_0 - |E| = \frac{m}{2\alpha^2} \dot{y}^2 + |E| y^2 \quad (4.1.18)$$

Ha csinálunk pár átnevezést, máris felismerhetjük ebben a harmonikus oszcillátort ($E' = V_0 - |E|, m' = m/(\alpha^2), D' = 2|E|$), és visszakapjuk azt a periódusidőt, amit kiszámoltunk!

K4.2

Adott egy $V(x)$ potenciál, melynek egy lokális maximuma x_0 helyen van, ahol a potenciál közelítőleg

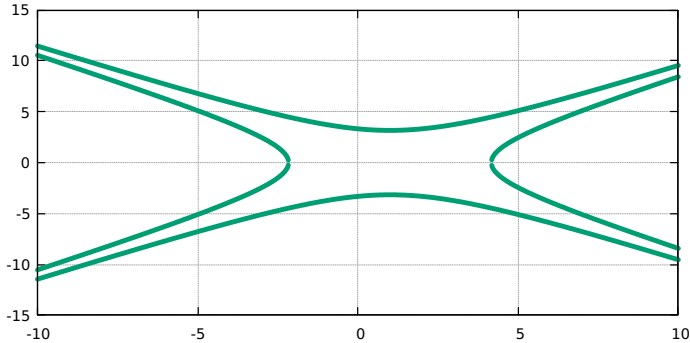
$$V(x) \simeq V_0 - \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 \quad (4.1.19)$$

- Hogyan néz ki a fázistér x_0 körül?
- Milyen az időfüggés a maximum körül?

Használjuk fel, hogy az energia megmarad:

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}(x - x_0)^2 + V_0 \quad \rightarrow \quad 1 = \pm \frac{\dot{x}^2}{\left(\sqrt{\frac{2|E-V_0|}{m}}\right)^2} \mp \frac{(x - x_0)^2}{\left(\sqrt{\frac{2|E-V_0|}{k}}\right)^2} \quad (4.1.20)$$

Az előjelet a $V_0 - E$ előjele dönti el.



Az időfüggést az Euler-Lagrange egyenletekből könnyedén megkaphatjuk:

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}(x - x_0)^2 - V_0 \quad (4.1.21)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \rightarrow m\ddot{x} = k(x - x_0) \quad (4.1.22)$$

$$m\ddot{x} = k(x - x_0) \quad \rightarrow \quad m\dot{x}' = kx' \quad (4.1.23)$$

ahol $x' = x - x_0$. Ebből egyből látszik, hogy

$$x(t) = A \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + B \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + x_0 \quad (4.1.24)$$

Legyen kezdetben a hely x_0 a sebesség pedig v_0 (ehhez természetesen $V_0 < E$ -re van szükség):

$$\begin{aligned} x(0) &= A + x_0 \quad \rightarrow \quad A = 0 \\ \dot{x}(0) &= B \sqrt{\frac{k}{m}} = v_0 \quad \rightarrow \quad B = \sqrt{\frac{m}{k}} v_0 \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

Így a maximum körüli időfüggés:

$$x(t) = x_0 + v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \quad (4.1.26)$$

Fontos megjegyezni, hogy ez addig jó, amíg jó közelítésnek gondoljuk a kvadrátikus sorfejtés a potenciálra x_0 körül!

K4.3

Tegyük fel, hogy egy könnyű belső szerkezet az inga hosszát $l(t) = l_0 \frac{(t+T)^2}{T^2}$ szerint változtatja. Adjuk meg az mozgásegyenleteket! Lökjük meg $t = 0$ -ban a testet vízszintesen v_0 sebességgel! Adjuk meg ebben az esetben egzaktul $\varphi(t) - t$!

A Lagrange-függvény:

$$L = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi \quad (4.1.27)$$

Euler-Lagrange egyenlet:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \quad (4.1.28)$$

Így:

$$\frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\varphi}) = -mgl \sin \varphi \quad (4.1.29)$$

Itt most a hossz is függ az időtől explicit módon! Így:

$$2ml\dot{\varphi} + ml^2\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi \quad (4.1.30)$$

$$2\dot{l}\dot{\varphi} + l\ddot{\varphi} = -g \sin \varphi \quad (4.1.31)$$

Most írjuk be $l(t)$ konkrét alakát, és vizsgáljuk a kis kitérések esetét:

$$\frac{4l_0}{T^2} (t+T)\dot{\varphi} + \frac{l_0}{T^2} (t+T)^2 \ddot{\varphi} = -g\varphi \quad (4.1.32)$$

Az ilyen típusú egyenleteknél érdemes bevezetni az $t + T = T \exp(s)$ változócsere (kényelmi szempont, hogy $s = 0$ -hoz $t = 0$ tartozzon, továbbá szigorúan monoton a transzformációs függvény, negatív időkre meg nincsen szükség). Ezzel:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} = \varphi'(s) \dot{s} = \varphi'(s) \frac{1}{t+T} \quad (4.1.33)$$

A második derivált:

$$\ddot{\varphi} = \varphi''(s) \frac{1}{(t+T)^2} - \varphi'(s) \frac{1}{(t+T)^2} \quad (4.1.34)$$

Így a differenciálegyenlet az új változóban:

$$\frac{4l_0}{T^2} \varphi'(s) + \frac{l_0}{T^2} (\varphi''(s) - \varphi'(s)) = -g\varphi(s) \quad (4.1.35)$$

Átrendezve:

$$\varphi''(s) + 3\varphi'(s) = -\frac{gT^2}{l_0}\varphi(s) \quad (4.1.36)$$

Ez az s változóban egy csillapított oszcillátor melynek megoldása:

$$\varphi(s) = e^{-\frac{3}{2}s} (A \sin(\omega_0 T s) + B \cos(\omega_0 T s)) \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l_0} \quad (4.1.37)$$

Így a valódi időben:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\left(\frac{t+T}{T}\right)^{\frac{3}{2}}} \left(A \sin \left(\omega_0 T \ln \left(\frac{t+T}{T} \right) \right) + B \cos \left(\omega_0 T \ln \left(\frac{t+T}{T} \right) \right) \right) \quad (4.1.38)$$

Kezdetben a kitérés zérus:

$$\varphi(0) = B = 0 \quad (4.1.39)$$

Míg a szögsebesség $v_0 l_0$:

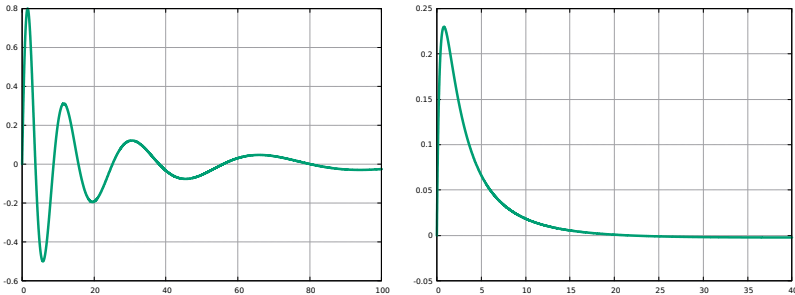
$$\dot{\varphi}(t) = -\frac{3}{2T} \left(1 + \frac{t}{T}\right)^{-5/2} A \sin(\dots) + \left(1 + \frac{t}{T}\right)^{-3/2} A \cos(\dots) \omega_0 T \frac{1}{t+T} \quad (4.1.40)$$

$$\dot{\varphi}(0) = A \omega_0 = v_0 l_0 \rightarrow A = \frac{v_0 l_0}{\omega_0} \quad (4.1.41)$$

A kezdőfeltételekhez rögzített megoldás tehát:

$$\varphi(t) = \frac{v_0 l_0}{\omega_0} \left(1 + \frac{t}{T}\right)^{-3/2} \sin \left(\omega_0 T \ln \left(\frac{t+T}{T} \right) \right) \quad (4.1.42)$$

A gT^2/l_0 nagyságától függően két eset lehetséges (alul és túlcillapítás, a csillapítási tényező s változóban konstans 3).



26. ábra. Függőleges és az inga által bezárt szög idő függvényében. Bal oldali esetben $gT^2/l_0 > 9/4$ míg a jobb oldali esetben $(gT^2)/l_0 < 9/4$.

K4.4

Forgassunk egy matematikai ingát a függőleges tengely körül egy állandó ω szögsebességgel (centrifugális szabályozó). Adjuk meg az egyensúlyi helyzeteket, és az ezek körüli kis rezgések frekvenciáját!

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = K - V \quad (4.1.43)$$

$$K = \frac{m}{2} (l^2 \dot{\varphi}^2 + l^2 \omega^2 \sin^2 \varphi) \quad V = -mgl \cos \varphi \quad (4.1.44)$$

Kanonikus mennyiségek:

$$\dot{p} = ml^2 \ddot{\varphi} \quad F = -mgl \sin \varphi + ml^2 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi \quad (4.1.45)$$

Így a mozgásegyenlet:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi + \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi \quad (4.1.46)$$

Egyensúlyi helyzetek az alábbi helyeken vannak:

$$\sin \varphi^* = 0 \quad \cos \varphi^* = \frac{g}{l\omega^2} \quad (4.1.47)$$

Lassú forgatás esetén $\varphi = 0$ körül lehet nézni kis rezgéseket:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \varphi + \omega^2 \varphi \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l} - \omega^2} \quad (4.1.48)$$

Gyors forgás esetén a véges $\varphi = \varphi^*$ körül kell sorbafejteni mindent. Lineáris rendig:

$$\sin \varphi \simeq \sin \varphi^* + \cos \varphi^* (\varphi - \varphi^*) \quad \cos \varphi \simeq \cos \varphi^* - \sin \varphi^* (\varphi - \varphi^*) \quad (4.1.49)$$

Legyen az új változónk $\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi^*$. Így lineáris rendig:

$$\ddot{\tilde{\varphi}} = -\frac{g}{l} \sin \varphi^* - \frac{g}{l} \tilde{\varphi} \cos \varphi^* + \omega^2 \cos \varphi^* \sin \varphi^* + (\cos^2 \varphi^* - \sin^2 \varphi^*) \omega^2 \tilde{\varphi} \quad (4.1.50)$$

Így:

$$\ddot{\tilde{\varphi}} = -\left(\omega^2 - \frac{g^2}{l^2 \omega^2}\right) \tilde{\varphi} \quad (4.1.51)$$

Tehát a frekvenciák:

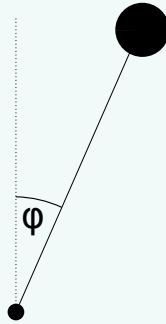
$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 - \frac{g^2}{l^2 \omega^2}} \quad (4.1.52)$$

K4.5

Adott az alábbi potenciál:

$$V(\varphi) = \frac{k}{2} l^2 \varphi^2 + mgl \cos \varphi \quad (4.1.53)$$

A paraméterek függvényében hol van egyensúlyi helyzete az m tömegű testnek? Vázoljuk fel a bifurkációs diagramot!



Írjuk fel a kinetikus és potenciális energiát:

$$K = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 \quad V(\varphi) = \frac{k}{2} l^2 \varphi^2 + mgl \cos \varphi \quad (4.1.54)$$

Euler-Lagrange egyenlet:

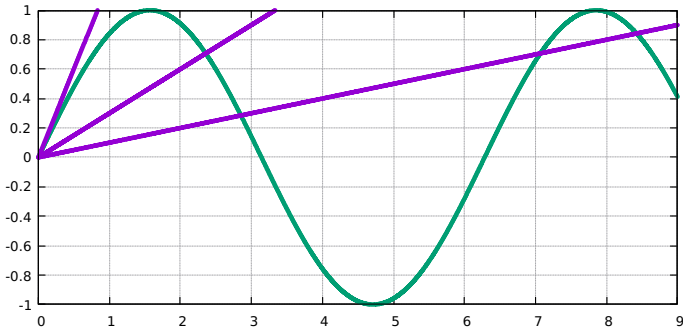
$$F_{\varphi} = \dot{p}_{\varphi} \quad (4.1.55)$$

ahol

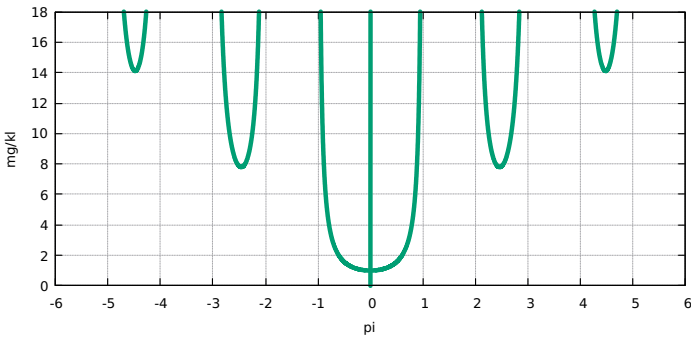
$$F_{\varphi} = -kl^2 \varphi + mgl \sin \varphi \quad \dot{p}_{\varphi} = ml^2 \ddot{\varphi} \quad (4.1.56)$$

Egyensúlyi helyzetek ott lesznek, ahol a kanonikus erő zérus:

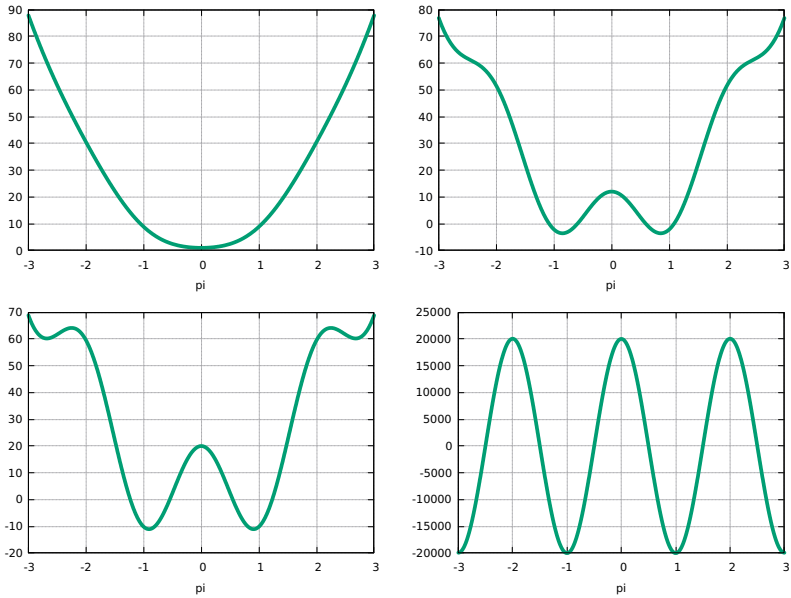
$$\sin \varphi^* = \frac{kl}{mg} \varphi^* \quad (4.1.57)$$



27. ábra. A lineárisok és a szinusz metszéspontjai határozzák meg az egyensúlyi helyzeteket. Az egyenes meredeksége kl/mg , így növelnél például a tömeget egyre több egyensúlyi helyzet jelenik meg.



28. ábra. Bifurkációs diagram a dimenziótlan mg/kl függvényében.



29. ábra. A potenciál alakja különböző mg/kl értékekre. Növelve ennek értékét egyre több egyensúlyi helyzet jelenik meg, felváltva stabil és instabil.

Csillapított mozgások

K4.6

Milyen a pályája egy vízszintesen elhajított testnek, ha rá egy sebességgel arányos, ellentétes irányú súrlódási erő hat?

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \quad R = \frac{\gamma}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (4.1.58)$$

A mozgásegyenletek:

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} \quad (4.1.59)$$

$$m\ddot{y} = -mg - \gamma\dot{y} \quad (4.1.60)$$

Könnyítésnek írjuk át sebességekre:

$$\dot{v}_x = -\frac{\gamma}{m}v_x \rightarrow v_x = A_x e^{-(\gamma/m)t} \rightarrow x(t) = -A_x \frac{m}{\gamma} e^{-(\gamma/m)t} + B_x \quad (4.1.61)$$

Indítsuk a testet az origóból $\mathbf{v} = (1, 0)$ sebességgel:

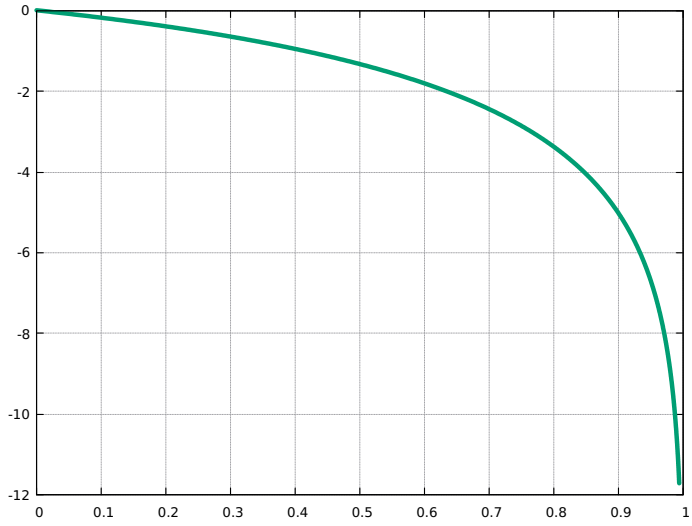
$$x(t) = \frac{m}{\gamma} \left(1 - e^{-(\gamma/m)t} \right) \quad (4.1.62)$$

Másik koordinátára:

$$\dot{v}_y = -g - \frac{\gamma}{m}v_y \rightarrow v_y = A_y e^{-(\gamma/m)t} - \frac{mg}{\gamma} \quad (4.1.63)$$

Így

$$y(t) = \frac{m^2 g}{\gamma^2} \left(1 - e^{-(\gamma/n)t} \right) - \frac{mg}{\gamma} t \quad (4.1.64)$$



K4.7

Oldjuk meg a ferde rugós példát úgy, hogy a rugó hosszának megváltozási sebességével arányos belső súrlódás disszipálja az energiát!

$$R = \frac{\eta}{2} \dot{l}^2 \quad (4.1.65)$$

$$l = \sqrt{x^2 + d^2} \quad \dot{l} = \frac{x\dot{x}}{\sqrt{x^2 + d^2}} \quad \dot{l}^2 = \frac{x^2\dot{x}^2}{x^2 + d^2} \quad (4.1.66)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = \eta \frac{x^2}{x^2 + d^2} \dot{x} \quad (4.1.67)$$

$$m\ddot{x} + kx \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + d^2}} \right) = -\eta \frac{x^2\dot{x}}{x^2 + d^2} \quad (4.1.68)$$

Először vizsgáljuk az $l_0 > d$ esetet:

$$x = x_0 + \Delta x \quad x_0^2 = l_0^2 - d^2 \quad (4.1.69)$$

$$\Delta\ddot{x} + \frac{k}{m}(x_0 + \Delta x) \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{(x_0 + \Delta x)^2 + d^2}} \right) = -\frac{\eta}{m} \frac{(x_0 + \Delta x)^2}{(x_0 + \Delta x)^2 + d^2} \Delta\dot{x} \quad (4.1.70)$$

Lineáris rendig sorbafejtve mindent:

$$\Delta\ddot{x} + \frac{k}{m} \frac{l_0^2 - d^2}{l_0^2} \Delta x = -\eta \frac{l_0^2 - d^2}{l_0^2} \Delta\dot{x} \quad (4.1.71)$$

Tömörebben:

$$\Delta\ddot{x} + \omega^2 \Delta x + \alpha \Delta\dot{x} = 0 \quad (4.1.72)$$

Erről tudjuk, hogy mi a megoldása:

$$\Delta x(t) = e^{-\frac{\alpha}{2}t} (A_1 \cos(\omega_s t) + A_2 \sin(\omega_s t)) \quad (4.1.73)$$

Nézzük meg egy olyan módszert, ami lassan csökkenő amplitúdó esetén működik bonyolultabb csillapításra is: időátlagolás.

$$\Delta x(t) = a(t) \cos(\omega_s t) \quad (4.1.74)$$

Visszaírva:

$$\ddot{a} \cos(\omega_s t) - 2\dot{a}\omega \sin(\omega_s t) + \alpha (\dot{a} \cos(\omega_s t) - a\omega_s \sin(\omega_s t)) = 0 \quad (4.1.75)$$

Időátlagot véve mondjuk egy periódusra itt minden zérus. Szorozzuk meg mindkét oldalt:

$$\ddot{a} \cos(\omega_s t) \sin(\omega_s t) - 2\dot{a}\omega \sin^2(\omega_s t) + \alpha \dot{a} \cos(\omega_s t) \sin(\omega_s t) - \alpha a \sin^2(\omega_s t) = 0 \quad (4.1.76)$$

Most vegyünk időátlagot:

$$-\dot{a} - \frac{\alpha}{2}a = 0 \quad \rightarrow \quad a(t) \sim e^{-\frac{\alpha}{2}t} \quad (4.1.77)$$

Azt tettük fel, hogy a csillapítás elég kicsi ahhoz, hogy az amplitúdó lassan változzon, így egy periódus alatt lényegében nem változik, tehát az integrál elég kiemelhető az amplitúdónak (és annak deriváltjainak) az azon periódus alatti értéke. Ami marad, az tisztán az amplitúdóra vonatkozó differenciálegyenlet. Vizsgáljuk most meg az $l_0 < d$ esetet. Ekkor ugye $x = 0$ körül kell majd sorbafejteni mindent.

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + d^2}}\right) = -\frac{\eta}{m} \frac{x^2}{x^2 + d^2} \dot{x} \quad (4.1.78)$$

Észrevétel: a jobb oldal sorában az első nem eltűnő tag kvadratikus, így mindent addig a rendig kell megtartani:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x \left(1 - \frac{l_0}{d} - \frac{1}{2} \frac{l_0}{d^3} x^2\right) = -\frac{\eta}{m} \dot{x} \frac{x^2}{d^2} \quad (4.1.79)$$

$$\ddot{x} + \left(1 - \frac{l_0}{d}\right) \frac{k}{m}x - \frac{1}{2} \frac{kl_0}{md^3} x^3 + \frac{\eta}{md^2} \dot{x} x^2 = 0 \quad (4.1.80)$$

Tömörebben:

$$\ddot{x} + \omega^2 x - bx^3 + \alpha \dot{x} x^2 = 0 \quad (4.1.81)$$

Időátlagolós módszerrel:

$$x(t) = a(t) \cos(\omega t) \quad (4.1.82)$$

$$\dot{x} = \dot{a} \cos(\omega t) - a\omega \sin(\omega t) \quad (4.1.83)$$

$$\ddot{x} = \ddot{a} \cos(\omega t) - 2\dot{a}\omega \sin(\omega t) - a\omega^2 \cos(\omega t) \quad (4.1.84)$$

Így

$$\ddot{a} \cos(\omega t) - 2\dot{a}\omega \sin(\omega t) - ba^3 \cos^3(\omega t) + \alpha a^2 \cos^2(\omega t) (\dot{a} \cos(\omega t) - a\omega \sin(\omega t)) = 0 \quad (4.1.85)$$

Szorozzuk be \sin -szal mindent, majd vegyük időátlagot. Ekkor:

$$-8\dot{a} - \alpha a^3 = 0 \quad (4.1.86)$$

$$\frac{da}{a^3} = -\frac{\alpha}{8} dt \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{a^2} = -\frac{\alpha}{8}(t+c) \quad (4.1.87)$$

Így:

$$a(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t+c}} \quad (4.1.88)$$

K4.8

Számoljuk ki a csillapított oszcillátor Green-függvényét!

A csillapított oszcillátor differenciálegyenlete egy Dirac-delta gerjesztéssel:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha \dot{x} = \delta(t) \quad (4.1.89)$$

Ezen egyenlet a Fourier-transzformáltakkal:

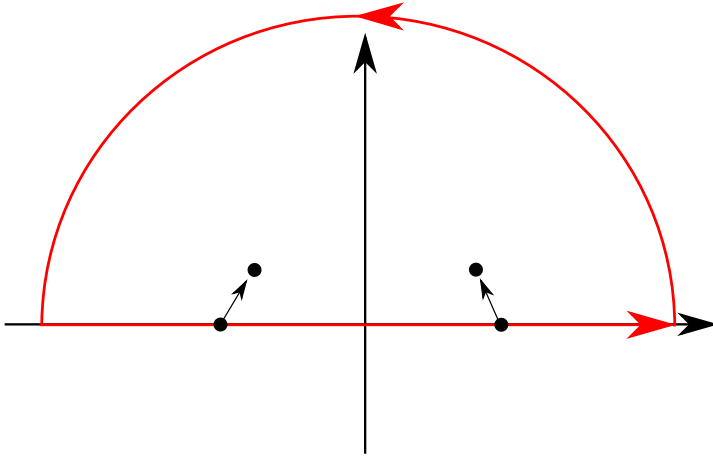
$$-\omega^2 x_\omega + \omega_0^2 x_\omega + i\omega \alpha x_\omega = 1 \quad (4.1.90)$$

$$x_\omega = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\alpha} = -\frac{1}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} =: G_\omega \quad (4.1.91)$$

ahol

$$\omega_{1,2} = \frac{i\alpha}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{4}} = \frac{i\alpha}{2} \pm \omega_s \quad (4.1.92)$$

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_\omega e^{i\omega t} d\omega = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} d\omega \quad (4.1.93)$$



30. ábra. Megfelelő komplex kontúr, amelyre alkalmazhatjuk a Reziduum-tételt. Súrlódás nélkül a szingularitások a tengelyen lennének.

$$G(t) = -\frac{1}{2\pi} 2\pi i \left(\frac{e^{i\omega_1 t}}{\omega_1 - \omega_2} + \frac{e^{i\omega_2 t}}{\omega_2 - \omega_1} \right) = \frac{1}{i} \left(\frac{e^{-\frac{\alpha}{2}t + i\omega_s t}}{2\omega_s} - \frac{e^{-\frac{\alpha}{2}t - i\omega_s t}}{2\omega_s} \right) \quad (4.1.94)$$

$$G(t) = \frac{\Theta(t)}{\omega_s} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin(\omega_s t) \quad (4.1.95)$$

K4.9

Hasson egy oszcillátorra az alábbi gerjesztés:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0 \\ f_0/\tau, & \text{ha } 0 < t < \tau \\ 0, & \text{ha } t > \tau \end{cases} \quad (4.1.96)$$

Mi kapunk $\tau \rightarrow 0$ határesetben (pillanatszerű lökés)?

Green-függvényes módszerrel keressünk partikuláris megoldást:

$$x_p(t) = [G * f](t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')f(t')dt' \quad (4.1.97)$$

ahol most a Green-fv:

$$G(t) = \frac{\Theta(t)}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \quad (4.1.98)$$

Így

$$x(t) = \frac{f_0}{\tau\omega_0} \int_0^{\tau} \Theta(t-t') \sin(\omega_0(t-t'))dt' \quad (4.1.99)$$

A lépcsőfüggvény olyan, hogy $t' < t$ esetén 1 míg $t' > t$ esetén zérus. Így abban az esetben, amikor $t < \tau$ az integrál:

$$x(t) = \frac{f_0}{\tau\omega_0} \int_0^t \sin(\omega_0(t-t'))dt' = \frac{f_0}{\tau\omega_0^2} (1 - \cos(\omega_0 t)) \quad (4.1.100)$$

Míg $t > \tau$ esetén:

$$x(t) = \frac{f_0}{\tau\omega_0} \int_0^{\tau} \sin(\omega_0(t-t'))dt' = \frac{f_0}{\tau\omega_0^2} (\cos(\omega_0(t-\tau)) - \cos(\omega_0 t)) \quad (4.1.101)$$

Mi történik $\tau \rightarrow 0$ határesetben? Ekkor csak a $t > \tau$ rész lesz az, ami számít:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} x(t) = -\frac{f_0}{\omega_0^2} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega_0(t-\tau))}{\tau} = \frac{f_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \quad (4.1.102)$$

Másik kérdés, hogy mekkora az amplitúdó a gerjesztés kikapcsolása után? Egy általános oszcilláció esetén:

$$A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = A' \sin(\omega t + \delta) = A' \sin(\omega t) \cos \delta + A' \cos(\omega t) \sin \delta \quad (4.1.103)$$

$$A = A' \cos \delta \quad B = A' \sin \delta \quad \rightarrow \quad A' = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (4.1.104)$$

Így a mi esetünkben:

$$(\cos(\omega_0(t - \tau)) - \cos(\omega_0 t)) = (\sin(\omega_0 t) \sin \tau + \cos(\omega_0 t) \cos \tau - \cos(\omega_0 t)) \quad (4.1.105)$$

$$x(t) = \frac{f_0}{\tau \omega_0^2} (\sin \tau \sin(\omega_0 t) + (\cos \tau - 1) \cos(\omega_0 t)) \quad (4.1.106)$$

Így az amplitúdó:

$$A^2 = \frac{2f_0^2}{\tau^2 \omega_0^4} (1 - \cos \tau) \quad (4.1.107)$$

Ha τ a 2π többszöröse, akkor zérus lesz a kilengés a gerjesztés után, míg páratlan π esetén lesz maximális.

K4.10

Oldjuk meg az előző példát alulesillapított oszcillátorra!

$t < \tau$ -ra az integrál:

$$x(t) = \frac{f_0}{\tau\omega_s} \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t')} \sin(\omega_s(t-t')) dt' = \quad (4.1.108)$$

Míg $t > \tau$ esetén:

$$x(t) = \frac{f_0}{\tau\omega_s} \int_0^\tau e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t')} \sin(\omega_s(t-t')) dt' = \quad (4.1.109)$$

Számoljuk ki tetszőleges határookra csak az integrál részt:

$$I = \int_a^b e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t')} \sin(\omega_s(t-t')) dt' \quad (4.1.110)$$

Parciális integrálással:

$$I = \frac{2}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t')} \sin(\omega_s(t-t')) \Big|_a^b + \frac{2\omega_s}{\alpha} \int_a^b e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t')} \cos(\omega_s(t-t')) dt' \quad (4.1.111)$$

$$\int_a^b e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t')} \cos(\omega_s(t-t')) dt' = \frac{2}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t')} \cos(\omega_s(t-t')) \Big|_a^b - \frac{2\omega_s}{\alpha} I \quad (4.1.112)$$

Így az integrál:

$$I = \frac{2\alpha e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t')} \sin(\omega_s(t-t')) \Big|_a^b + 4\omega_s e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t')} \cos(\omega_s(t-t')) \Big|_a^b}{\alpha^2 + 4\omega_s^2} \quad (4.1.113)$$

ami $\alpha = 0$ esetén:

$$I = \frac{1}{\omega_0} \cos(\omega_0(t-t')) \Big|_a^b \quad (4.1.114)$$

Gyakorló feladatok

F4.1 Vizsgáljuk az alábbi potenciált:

$$V(x) = V_0 (x^2 + \beta)^2 \quad V_0 > 0 \quad (4.2.115)$$

Írjuk fel a kanonikus mennyiségeket! Rajzoljunk fel bifurkációs diagramot a β függvényében! Milyen értéknél és hol lesznek stabil/instabil egyensúlyi helyzetek? Abban az esetben, amikor létezik instabil egyensúlyi helyzet, adjuk meg a fázistérbeli trajektória egyenletét e pont körül! Vázlatosan rajzoljuk fel a teljes fázisteret $b < 0$ esetén!

F4.2 Mi lesz a periódusidő, ha a potenciál

$$V(x) = V_0 \operatorname{tg}^2(\alpha x)$$

F4.3 Adott egy olyan fázistér, aminek sebességtengelytől balra első felén félellipszisek vannak, míg a jobbra eső felén vízszintes egyenesek (egymással folytonosan összekötve). Milyen potenciálnak felel ez meg?

F4.4 Vegyük a fonálinga fázisterét! Ebben két szignifikánsan különböző görbesereget a szeparátrix választ el (amikor nem lendül át az inga, és amikor átlendül). Mi ennek a szeparátrixnak az egyenlete a $\varphi = \pi$, $\dot{\varphi} = 0$ közelében? (tegyük fel, hogy az inga nyugalmi helyzete a $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$ pont)

F4.5 Vegyük a harmonikusan gerjesztett gyengén súrlódó oszcillátort. Mekkora a gerjesztő erő által investált teljesítmény? Adjuk meg egy formulát, ami azt mutatja, hogy egy fix nagyságú amplitúdó eléréséhez mekkora (időre átlagolt) teljesítményt kell befektetni a súrlódási tényező függvényében!

F4.6 Adott az alábbi, periodikusan lökdösött, súrlódásmentes, ω_0 saját-frekvenciájú oszcillátor:

$$f_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \delta [t - (2\pi n)/\omega]$$

Írjuk fel az n . Dirac-delta utáni amplitúdóját a rezgésnek! (Hívjuk segítségül a komplex számkörrel, trigonometriai addíciós tételekről és a geometriai sorokról tanultakat!) Rezonáns gerjesztés esetén mekkora lesz n "lökés" után az amplitúdó? Létezik-e olyan ω amire bizonyos n -ekre lenullázódik az amplitúdó?

Síkmozgások

Szükséges ismeretek és formulák

Centrális potenciál

K5.1

Milyen pályán mozog az alábbi potenciálban mozgó test?

$$V(r) = \frac{\alpha}{r^2} \quad (5.1.1)$$

A Lagrange függvény nem függ a szögtől, így az ahhoz tartozó kanonikus impulzus megmarad:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{\alpha}{r^2} \quad (5.1.2)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} \quad F_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad (5.1.3)$$

A megmaradó kanonikus impulzus az impulzuszórány:

$$J = mr^2 \dot{\varphi} = \text{konst.} \quad (5.1.4)$$

Mi történik, ha ezt visszairjuk a Lagrange függvénybe? Ehhez nézzük meg a szög variációját:

$$\delta \dot{\varphi} = -\frac{2J\delta r}{mr^3} \rightarrow \delta \varphi|_{t_0}^{t_1} = \int \delta \dot{\varphi} dt = -\int \frac{2J}{mr^3} \delta r dt \quad (5.1.5)$$

Hatás megváltozása a variációkra:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\left(\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) \right) \delta r dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \delta r \Big|_{t_0}^{t_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \delta \varphi \Big|_{t_0}^{t_1} \quad (5.1.6)$$

Tehát a stacionaritásra vonatkozó egyenlet:

$$\delta S - p_\varphi \delta \varphi|_{t_0}^{t_1} = \delta S + J \int_{t_0}^{t_1} \frac{2J}{mr^3} \delta r dt = \delta S - \int_{t_0}^{t_1} \delta \left(\frac{J^2}{mr^2} \right) dt \quad (5.1.7)$$

Tehát az effektív Lagrange-függvény:

$$L_{\text{eff}} = L - \frac{J^2}{mr^2} = \frac{m}{2} \dot{r}^2 - \frac{J^2}{2mr^2} - V(r) \quad (5.1.8)$$

Ehhez tartozó kanonikus mennyiségek:

$$p = \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad F = \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{J^2}{mr^3} \quad (5.1.9)$$

$$E = p\dot{r} - L = m\dot{r}^2 - \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2mr^3} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2mr^2} + V(r) \quad (5.1.10)$$

Induljunk ki az energiamegmaradásból:

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \left(\frac{J^2}{2m} + \alpha \right) \frac{1}{r^2} \quad (5.1.11)$$

Átrendezve:

$$\dot{r}^2 = \frac{2E}{m} - \left(\frac{J^2}{m^2} + \frac{2\alpha}{m} \right) \frac{1}{r^2} = A - \frac{B}{r^2} \quad (5.1.12)$$

ahol legyen először $A > 0$ és $B > 0$.

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{A - B/r^2}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - B/A}} \quad (5.1.13)$$

Kiintegrálva mind a két oldalt:

$$t + c_1 = \frac{1}{\sqrt{A}} \sqrt{r^2 - B/A} \quad (5.1.14)$$

Így a megoldás:

$$r(t) = \sqrt{A(t + c_1)^2 + B/A} \quad (5.1.15)$$

Mi a helyzet a szöggel? Induljunk ki abból, hogy az impulzusmomentum megmarad:

$$J = mr^2\dot{\varphi} \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{J}{mA} \frac{1}{(t + c_1)^2 + B/A^2} \quad (5.1.16)$$

Így a szög:

$$\varphi(t) = \frac{J}{m} \frac{1}{\sqrt{B}} \tan^{-1} \left(\frac{A}{\sqrt{B}} (t + c_1) \right) + c_2 \quad (5.1.17)$$

A pálya alakjához elimináljuk az időt:

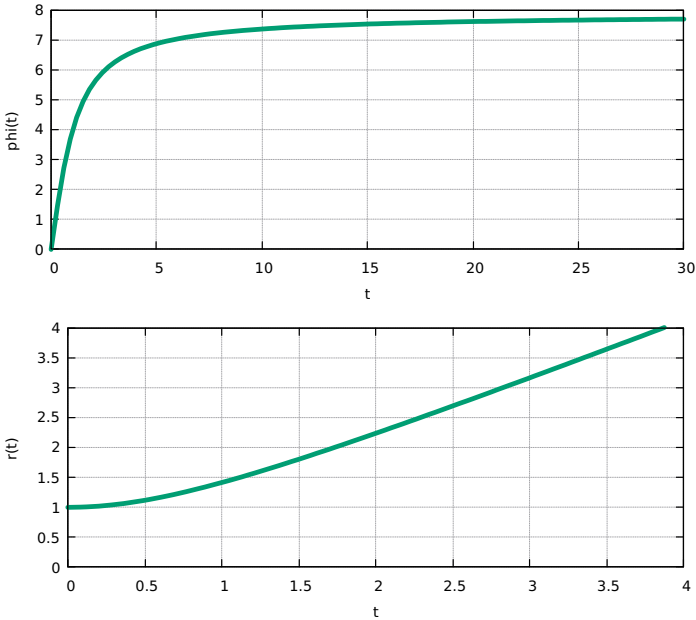
$$(t + c_1) = \frac{\sqrt{B}}{A} \tan \left(\frac{m\sqrt{B}}{J} (\varphi(t) - c_2) \right) \quad (5.1.18)$$

Ezt írjuk vissza az $r(t)$ formulájába:

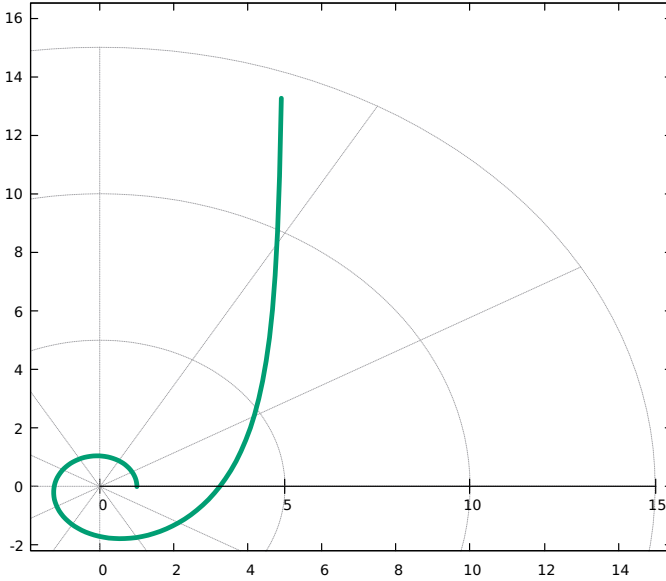
$$r(\varphi) = \sqrt{\frac{B}{A}} \sqrt{\tan^2 \left(\frac{m\sqrt{B}}{J}(\varphi - c_2) \right) + 1} = \sqrt{\frac{B}{A}} \frac{1}{\cos \left(\frac{m\sqrt{B}}{J}(\varphi - c_2) \right)} \quad (5.1.19)$$

Tehát a test végtelen idő alatt végeset fordul:

$$(\varphi - c_2)_{\max} = \Delta\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{B}} \frac{J}{2m} \quad (5.1.20)$$



31. ábra. A felső ábrán látható a szög az idő függvényében, amely végtelenben is véges marad. Az alsó ábrán a radiális koordináta látható az idő függvényében.



32. ábra. Pálya alakja $A > 0$ és $B > 0$ esetén.

Érdekesség, hogy be tudjuk úgy állítani a paramétereiket, hogy:

$$\frac{m\sqrt{B}}{J} = 1 \quad (5.1.21)$$

Ekkor az egyenlet ($c_2 = 0$ -t beírva, ami nem megszorítást):

$$r(\varphi) \cos \varphi = \sqrt{\frac{B}{A}} \quad (5.1.22)$$

ami egy egyenest ad. Mi a helyzet akkor, ha $\alpha < 0$? Amíg teljesül, hogy $B > 0$, tehát:

$$B = \frac{J^2}{2m} - |\alpha| > 0 \quad (5.1.23)$$

addig az eddigi megoldás marad. Mi a helyzet, ha a B negatív? Ez azért nehezebb, mert itt már lehet az energia, így A is tetszőleges előjelű lehet. Abban az esetben, amikor az energia, így A is negatív, elég az eddigi képletekben mindent kicserélni:

$$r(t) = \sqrt{|B|/|A| - |A|(t + c_1)^2} \quad (5.1.24)$$

$$\varphi(t) = \frac{J}{m} \frac{-i}{\sqrt{|B|}} \tan^{-1} \left(\frac{i|A|}{\sqrt{|B|}} (t + c_1) \right) + c_2 \quad (5.1.25)$$

Felhasználva, hogy:

$$\tan^{-1}(ix) = i \operatorname{th}^{-1}(x) \quad \cos(ix) = \operatorname{ch}(ix) \quad (5.1.26)$$

kapjuk, hogy:

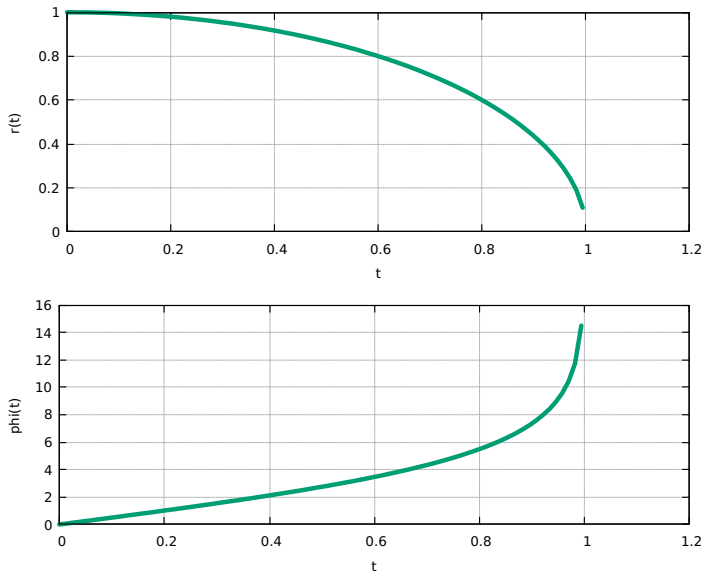
$$\varphi(t) = \frac{J}{m} \frac{1}{\sqrt{|B|}} \operatorname{th}^{-1} \left(\frac{|A|}{\sqrt{|B|}} (t + c_1) \right) + c_2 \quad (5.1.27)$$

És a pályára pedig:

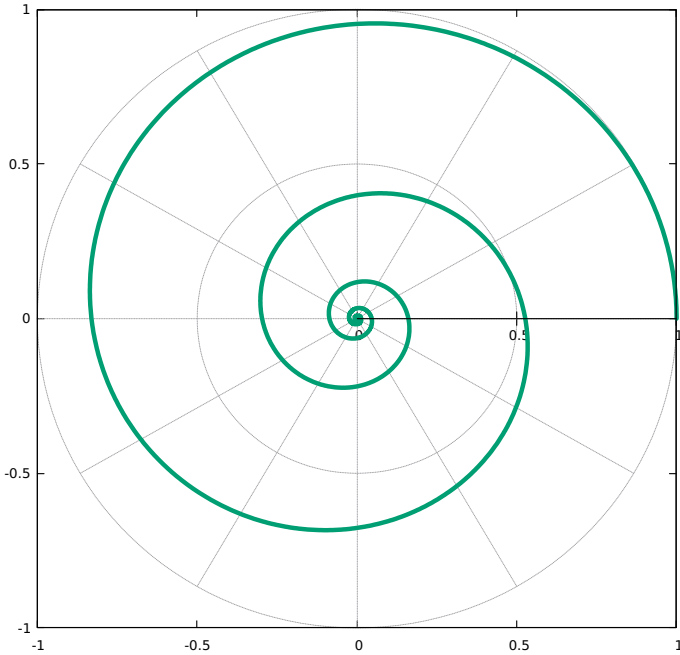
$$r(\varphi) = \sqrt{\frac{|B|}{|A|}} \frac{1}{\operatorname{ch} \left(\frac{m\sqrt{B}}{J} (\varphi - c_2) \right)} \quad (5.1.28)$$

Tehát a test véges idő alatt beesik a centrumba, miközben végtelen sokat fordul. Beesési idő (most $c_1 = 0$ -át véve):

$$(t + c_1)_{\max} = \Delta t = \frac{\sqrt{|B|}}{|A|} \quad (5.1.29)$$



33. ábra. A felső ábrán látható a szög az idő függvényében, amely végtelenben is véges marad. Az alsó ábrán a radiális koordináta látható az idő függvényében.


 34. ábra. Pálya alakja $A < 0$ és $B < 0$ esetén.

Mi a helyzet $B = 0$ esetén? Ekkor vissza kell térni egy korábbi egyenletre, és ezt oda beírni:

$$\dot{r}^2 = A - \frac{B}{r^2} = A = A \rightarrow r(t) = \pm\sqrt{At} + c_1 \quad (5.1.30)$$

Míg a J megmaradásából:

$$J = mr^2\dot{\varphi} \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{J}{m} \frac{1}{(\pm\sqrt{At} + c_1)^2} \quad (5.1.31)$$

amiből:

$$\varphi(t) = \mp \frac{J}{m\sqrt{A}} \frac{1}{\pm\sqrt{At} + c_1} + c_2 \quad (5.1.32)$$

Tehát:

$$r(\varphi) = \mp \frac{J}{m\sqrt{A}} \frac{1}{\varphi - c_2} \quad (5.1.33)$$

Mi a helyzet $B = 0$ esetén akkor, ha az A is zérus:

$$r(t) = c_1 \quad \varphi(t) = \frac{J}{mc_1^2} t \quad r(\varphi) = c_1 \quad (5.1.34)$$

Gyakorló feladatok

F5.1 Adott az alábbi potenciál:

$$V(r) = V_0 \frac{r^2}{a^2} \quad (5.2.35)$$

- Először oldjuk meg ezt a feladatot Descartes koordinátákban! Milyen kezdőfeltételek mellett jön létre körpálya?
- Írjuk fel a radiális koordinátára vonatkozó effektív potenciált. Igazoljuk, hogy ennek a minimuma éppen ott van, amekkora az előző feladatban kiszámolt körpálya sugara.

F5.2 Legyen a potenciál az alábbi:

$$V(r) = \alpha \ln(r/a) \quad (5.2.36)$$

Létrejöh-e körpálya? Ha igen, akkor stabil-e? Ehhez:

- Írjuk fel a csak r -től függő effektív potenciált. Ha ennek van egy r_0 szélsőértéke, akkor megvalósulhat ilyen sugarú körpálya. Mekkora ez az r_0 ?
- Ha az effektív potenciál szélsőértéke minimum, akkor a körpálya stabil. Itt mi a helyzet?
- Ha stabil a körpálya, akkor ettől kicsit eltérő radiális rezgés is létrejöh, miközben kering a test. Ehhez vizsgáljuk meg az effektív potenciálban az r_0 körüli kis rezgéseket. Adjuk meg ennek a kis rezgésnek az ω frekvenciáját!

F5.3 Adott az alábbi centrális potenciál:

$$V(r) = \alpha r^n \quad n \in \mathbb{Z} \quad (5.2.37)$$

Vizsgáljuk meg a pályák zártágát abban az esetben, amikor az effektív potenciálban kis rezgések jönnek létre, tehát a pálya közel körpálya. Jelölje a kis rezgések frekvenciáját ω , míg a keringés frekvenciáját ω_0 . A pálya akkor zárt, ha a két frekvencia hányadosa racionális. Mi a helyzet ebben az esetben? Ed-digi ismereteinkre támaszkodva adjunk meg olyan n -eket, ahol a körpályától tetszőleges mértékben eltérő pálya is zárt!

F5.4 Legyen a potenciál az alábbi:

$$V(r) = \alpha \ln(r/a) \quad (5.2.38)$$

Zárt-e a körpályától kissé eltérő alakú pálya?

F5.5 Milyen pályán mozog a test a $V(r) = \alpha/r^2$ -es potenciálban, ha az effektív potenciál vonzó és az energia pozitív?

Szórás

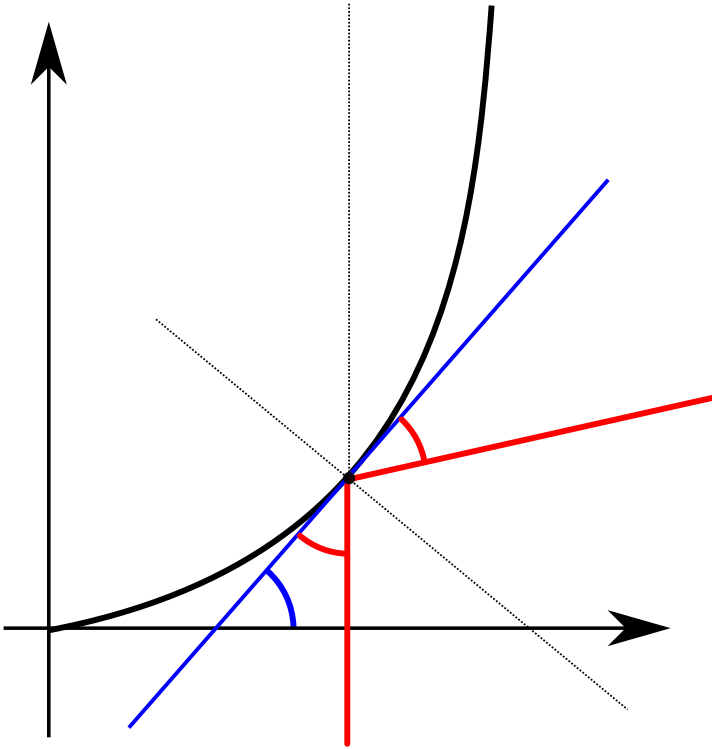
Szükséges ismeretek és formulák

Szórás merev forgásfelületen

K6.1

Adjuk meg a differenciális szórási határkeresztmetszetet, ha egy z tengely körül megforgatott $z = x^n$ forgástesten szóródnak a részecskék, ami a z tengellyel párhuzamosan érkeznek be!

Geometriai megfontolásokkal kapcsolatot tudunk teremteni a szóródási szög és az $z(x)$ függvény deriváltja között. Az alábbi ábráról leolvasható, hogy az ütközési pontba rajzolt érintő éppen felezi a szóródási szöget.



35. ábra. Az ütközési pontba rajzolt érintő éppen felezi a szóródási szöveget.

Az ábráról tehát le lehet olvasni, hogy:

$$z'(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{1}{\tan(\vartheta/2)} \quad (6.1.1)$$

Tehát:

$$z'(b) = nb^{n-1} = \frac{1}{\tan(\vartheta/2)} \rightarrow b(\vartheta) = \left(n \tan\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right)^{-\frac{1}{n-1}} \quad (6.1.2)$$

$$\frac{db}{d\vartheta} = -\frac{1}{n-1} \left(n \tan\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right)^{-\frac{n}{n-1}} \frac{n}{2 \cos^2(\vartheta/2)} \quad (6.1.3)$$

És akkor a kérdéses mennyiség:

$$\sigma_{\text{diff}} = \frac{b(\vartheta)}{\sin \vartheta} \left| \frac{db}{d\vartheta} \right| = \frac{n}{n-1} \frac{1}{2 \sin \vartheta \cos^2(\vartheta/2)} \left(n \tan \left(\frac{\vartheta}{2} \right) \right)^{-\frac{n+1}{n-1}} \quad (6.1.4)$$

Parabolára:

$$\sigma_{\text{diff}} = \frac{1}{\sin \vartheta \cos^2(\vartheta/2)} \left(2 \tan \left(\frac{\vartheta}{2} \right) \right)^{-3} = \frac{1}{8} \frac{\cos(\vartheta/2)}{\sin \vartheta \sin^3(\vartheta/2)} \quad (6.1.5)$$

Felhasználva, hogy $\sin(\vartheta) = \sin(\vartheta/2 + \vartheta/2) = 2 \cos(\vartheta/2) \sin(\vartheta/2)$:

$$\sigma_{\text{diff}} = \frac{1}{16} \frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)} \quad (6.1.6)$$

Ez éppen olyan alakú, mint a Rutherford szórás differenciál hatáskeresztmet-szete.

Kis szögű szórás

K6.2

Born-közelítéssel határozzuk meg a gravitációs potenciálban, kis szögben szóródás differenciális hatáskeresztmetszetét!

A közelítésnek az a lényege, hogy a v_0 kezdősebességgel belőtt részecske gyakorlatilag végig b impakt paraméter által kijelölt egyenes közelében halad, továbbá csak egy kicsi merőleges impulzust vesz fel szóródása során úgy, hogy a párhuzamos v_0 komponens nagyjából állandó marad. Ekkor egy szóródás szöge a centrumtól már messze:

$$\tan \vartheta = \frac{\Delta v_y}{v_0} \quad (6.1.7)$$

ahol y irány a kezdeti sebesség irányra merőleges irány. Ekkor:

$$\Delta v_y = \int_{-\infty}^{\infty} a_y dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_y}{v_0} dx \quad (6.1.8)$$

Az y irányú gyorsulást könnyedén megkaphatjuk a radiális gyorsulásból. Felhasználva, hogy a centrumtól vett távolság y komponense nagyjából végig b :

$$a_y = a_r \frac{b}{\sqrt{b^2 + x^2}} \quad (6.1.9)$$

Ismerve a potenciált:

$$a_r = -\frac{1}{m} \frac{\partial V(r)}{\partial r} \quad (6.1.10)$$

Ekkor a szóródás szöge (kihasználva már, hogy kicsi szögekről van szó):

$$\vartheta = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{mv_0^2} \frac{\partial V(r)}{\partial r} \Big|_{r=\sqrt{x^2+b^2}} \frac{b}{\sqrt{b^2+x^2}} dx \quad (6.1.11)$$

Írjunk be $V(r) = \alpha r^{-1}$ -es potenciált:

$$\vartheta = \frac{\alpha b}{mv_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(b^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{\alpha}{b^2 mv_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{x}{b}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} dx \quad (6.1.12)$$

Bevetve az $y = \frac{x}{b}$ új változót:

$$\frac{\alpha}{bmv_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} dy = \frac{\alpha}{bmv_0^2} \left[\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{2\alpha}{bmv_0^2} \quad (6.1.13)$$

Tehát a keresett függvény:

$$b(\vartheta) = \frac{2\alpha}{mv_0^2\vartheta} \quad (6.1.14)$$

A differenciális szórási határkeresztmetszet:

$$\sigma_{\text{diff}} = \frac{b(\vartheta)}{\sin \vartheta} \left| \frac{\partial b}{\partial \vartheta} \right| \simeq \left(\frac{2\alpha}{mv_0^2} \right)^2 \frac{1}{\vartheta^4} \quad (6.1.15)$$

Gyakorló feladatok

F6.1 Számoljuk ki a differenciális szórási hatáskeresztmetszetet egy forgás hiperboloidra!

F6.2 Born-közelítéssel határozzuk meg a $V(r) = V_0(r/R)^n$ potenciálban, kis szögben szóródás differenciális hatáskeresztmetszetét!

Kényszerek

Szükséges ismeretek és formulák

Holonom kényszer

K7.1

Mekkora erővel nyomja a test a felszínt, ha egy köríven csúszik le?

A kényszert Lagrange multiplikatórral figyelembevevő Lagrange-függvény:

$$L_\lambda = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \lambda (\sqrt{x^2 + y^2} - R) \quad (7.1.1)$$

Euler-Lagrange egyenletek:

$$m\ddot{x} = \lambda \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (7.1.2)$$

$$m\ddot{y} = -mg + \lambda \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (7.1.3)$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = R \quad (7.1.4)$$

Deriváljuk le a kényszert kétszer:

$$\frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \quad (7.1.5)$$

Elég csak a számlálót deriválni újra:

$$x\ddot{x} + \dot{x}^2 + y\ddot{y} + \dot{y}^2 = 0 \quad (7.1.6)$$

Energiamagmaradásból:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \frac{2}{m} (E - mgy) \quad (7.1.7)$$

Minden visszaírva:

$$\frac{2}{m} (E - mgy) + \frac{\lambda}{m} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\lambda}{m} \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - gy = 0 \quad (7.1.8)$$

Ebből kell kifejezni a λ -t:

$$\frac{\lambda}{m} \sqrt{x^2 + y^2} - gy + \frac{2}{m}(E - mgy) = 0 \quad (7.1.9)$$

$$\lambda = \frac{mgy - 2(E - mgy)}{R} = \frac{3mgy - 2E}{R} \quad (7.1.10)$$

Elválás:

$$y_0 = \frac{2}{3} \frac{E}{mg} \quad (7.1.11)$$

K7.2

Csússzon egy síelő lefelé egy $y = -\alpha x^4$ alakú lejtőről. Mekkora a csomóerő a hely függvényében? Hol válik el a síelő a pályától, ha zérus a kezdősebessége (vagy legalább infintezimálisan kicsi)?

A mozgást leíró Lagrange-függvény:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \lambda (y + \alpha x^4) \quad (7.1.12)$$

Euler-Lagrange egyenletek:

$$m\ddot{x} = 4\lambda\alpha x^3 \quad (7.1.13)$$

$$m\ddot{y} = -mg + \lambda \quad (7.1.14)$$

$$y = -\alpha x^4 \quad (7.1.15)$$

Ha a λ a kérdés, akkor az úgy kapjuk meg, hogy lederiváljuk a kényszert kétszer, és abban visszaírjuk a deriváltakra vonatkozó kifejezéseket. Kényszer deriváltja:

$$\dot{y} = -4\alpha x^3 \dot{x} \rightarrow \ddot{y} = -12\alpha x^2 \dot{x}^2 - 4\alpha x^3 \ddot{x} \quad (7.1.16)$$

A második deriváltakat az Euler-Lagrange egyenletekből kapjuk. Az első deriválthoz vegyük elő az energiát:

$$E = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy \quad (7.1.17)$$

Mielőtt kifejeznénk \dot{x} -et, emeljük négyzetre a kényszer első deriváltját:

$$\dot{y}^2 = 16\alpha^2 x^6 \dot{x}^2 \rightarrow E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 (1 + 16\alpha^2 x^6) + mgy \quad (7.1.18)$$

Tehát

$$\dot{x}^2 = \frac{\frac{2}{m}(E - mgy)}{1 + 16\alpha^2 x^6} \quad (7.1.19)$$

Ezeket mind írjuk vissza a második deriváltakra vonatkozó képletbe:

$$-mg + \lambda = -12\alpha x^2 \frac{2(E - mgy)}{1 + 16\alpha^2 x^6} - 16\lambda\alpha^2 x^6 \quad (7.1.20)$$

$$\lambda(1 + 16\alpha^2 x^6) = mg - 24\alpha x^2 \frac{E + mg\alpha x^4}{1 + 16\alpha^2 x^6} \quad (7.1.21)$$

Tehát a λ -ra:

$$\lambda = \frac{mg}{1 + 16\alpha^2 x^6} \left(1 - 24\alpha x^2 \frac{E/mg + \alpha x^4}{1 + 16\alpha^2 x^6} \right) \quad (7.1.22)$$

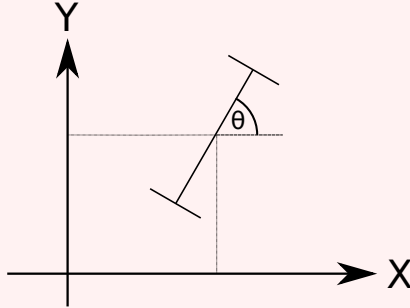
Vegyük azt az esetet, amikor zérus kezdősebességgel lökjük meg a testet ($E=0$). Mikor lesz zérus ekkor a kényszererő?

$$1 - \frac{24\alpha^2 x^6}{1 + 16\alpha^2 x^6} = 0 \rightarrow x_p = \left(\frac{1}{8\alpha^2} \right)^{1/6} \quad (7.1.23)$$

Anholonom kényszer

K7.3

Hogy mozog egy l hosszúságú, m tömegű vékony rúddal összekötött, csapágyazott, r sugarú tárcsákon guruló test a síkon?



Anholonom esetben a kényszer:

$$\sum_k a_{jk} dq_k = 0 \sim \sum_k a_{jk} \dot{q}_k = 0 \quad (7.1.24)$$

Itt az rendszert leíró összes koordinátára megy. Míg a mozgásegyenlet:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} + \sum_j \lambda_j a_{jk} \quad (7.1.25)$$

Az összeg itt az összes kényszerre megy. A feladatban szereplő rendszerr kinetikus energiája:

$$K = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m}{24} l^2 \dot{\vartheta}^2 = L \quad (7.1.26)$$

Kényszerek:

$$\dot{x} = \frac{r}{2} (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \sin \vartheta \quad (7.1.27)$$

$$\dot{y} = \frac{r}{2} (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \cos \vartheta \quad (7.1.28)$$

$$\frac{l}{2} \dot{\vartheta} = r (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \quad (7.1.29)$$

Megoldás visszaírással:

$$K = \frac{mr^2}{8} (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 + \frac{ml^2}{24} (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)^2 \quad (7.1.30)$$

Mind a két koordinátához tartozó kanonikus impulzus megmarad:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{mr^2}{4} (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) + \frac{ml^2}{12} (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) = c_1 \quad (7.1.31)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = \frac{mr^2}{4} (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) - \frac{ml^2}{12} (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) = c_2 \quad (7.1.32)$$

Így:

$$\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 = \tilde{c}_1 \rightarrow \varphi_1 = -\varphi_2 + \tilde{c}_1 t + d_1 \quad (7.1.33)$$

$$\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 = \tilde{c}_2 \rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 + \tilde{c}_2 t + d_2 \quad (7.1.34)$$

Tehát:

$$\varphi_1(t) = a_1 t + \tilde{d}_1 \quad (7.1.35)$$

$$\varphi_2(t) = a_2 t + \tilde{d}_2 \quad (7.1.36)$$

Általánosság megszorítás nélkül mondhatjuk, hogy a kezdetben zérus legyen az elfordulás. Ekkor:

$$\varphi_1(t) = a_1 t \quad (7.1.37)$$

$$\varphi_2(t) = a_2 t \quad (7.1.38)$$

$$\vartheta = \frac{2r}{l} (a_1 - a_2) t + \vartheta_0 = \omega t + \vartheta_0 \quad (7.1.39)$$

Visszaírva Descartes-koordinátákra:

$$\dot{x} = \frac{r}{2} (a_1 + a_2) \sin \vartheta \rightarrow x(t) = \tilde{x}_0 - \frac{r}{2\omega} \cos \vartheta \quad (7.1.40)$$

$$\dot{y} = \frac{r}{2} (a_1 + a_2) \cos \vartheta \rightarrow y(t) = \tilde{y}_0 + \frac{r}{2\omega} \sin \vartheta \quad (7.1.41)$$

A visszaírási módszer kizárólag azért működött, mert maga a Lagrange függvény is csak deriváltakat tartalmazott, minden egyéb esetben a módszer nem működik anholonom esetben. Ez egy súlyos eltérés a holonom esetekől. Oldjuk meg tehát a problémát multiplikátorokkal is! A Lagrange-függvény:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m}{242} l^2 \dot{\vartheta}^2 \quad (7.1.42)$$

Kényszerek differenciális alakban:

$$j = 1 \quad 1 \cdot dx + 0 \cdot dy - \frac{r}{2} \sin \vartheta \cdot d\varphi_1 - \frac{r}{2} \sin \vartheta \cdot d\varphi_2 + 0 \cdot d\vartheta = 0 \quad (7.1.43)$$

$$j = 2 \quad 0 \cdot dx + 1 \cdot dy - \frac{r}{2} \cos \vartheta \cdot d\varphi_1 - \frac{r}{2} \cos \vartheta \cdot d\varphi_2 + 0 \cdot d\vartheta = 0 \quad (7.1.44)$$

$$j = 3 \quad 0 \cdot dx + 0 \cdot dy - \frac{2r}{l} \cdot d\varphi_1 + \frac{2r}{l} \cdot d\varphi_2 + 1 \cdot d\vartheta = 0 \quad (7.1.45)$$

Euler-Lagrange egyenletek:

$$m\ddot{x} = \lambda_1 \quad (7.1.46)$$

$$m\ddot{y} = \lambda_2 \quad (7.1.47)$$

$$0 = -\lambda_1 \frac{r}{2} \sin \vartheta - \lambda_2 \frac{r}{2} \cos \vartheta - \lambda_3 \frac{2r}{l} \quad (7.1.48)$$

$$0 = -\lambda_1 \frac{r}{2} \sin \vartheta - \lambda_2 \frac{r}{2} \cos \vartheta + \lambda_3 \frac{2r}{l} \quad (7.1.49)$$

$$\frac{m}{12} l^2 \ddot{\vartheta} = \lambda_3 \quad (7.1.50)$$

A φ -kre vonatkozó egyenletekből:

$$\lambda_3 = 0 \quad (7.1.51)$$

Így

$$\vartheta = \omega t + \vartheta_0 \quad (7.1.52)$$

Most használjuk fel, hogy az energia megmarad:

$$E = K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m}{24} l^2 \omega^2 \rightarrow (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \text{konst.} \quad (7.1.53)$$

Ebből a kényszerek figyelembevételével adódik, hogy:

$$(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) = \text{konst.} \quad (7.1.54)$$

Gyakorló feladatok

F7.1 Csússzon le egy $f(x) = -\alpha x^2$ alakú lejtő tetejéről egy test v_0 kezdősebességgel! Adjuk meg, hogy adott ponton mekkora erővel nyomja a test a felületet! Ebből mutassuk meg, hogy a test vagy elválik már az elején a pályától, vagy sosem válik el!

F7.2 Egy síelő $f(x) = -\beta x^3$ alakú pályán halad. Hol válik el a pályától, ha zérus kezdősebességgel indul az $x = -|x_0|$ pontból?

F7.3 Egy $x^2 + y^2 = R^2$ egyenletű felület tetejéről csúszik le zérus kezdősebességgel egy test. Mekkora erővel nyomja adott ponton a test a felületet. Oldjuk meg a problémát polár koordinátákkal!

Kis rezgések

Szükséges ismeretek és formulák

Golyós-rugós rendszerek

K8.1

Adjuk meg egy két testből álló golyós-rugós rendszer sajátmódusait! A két test azonos tömegű. A két szélső rugó k , míg a középső K direkció erejű.



Új általános koordináták: az egyenesújlly helyzettől való eltérés. Rendre x_1 , x_2 és x_3 . Ezekkel a Lagrange-függvény:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2} x_1^2 - \frac{K}{2} (x_2 - x_1)^2 - \frac{k}{2} x_2^2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} \mathbf{x} \mathbf{K} \mathbf{x} \quad (8.1.1)$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k + K & -K \\ -K & k + K \end{pmatrix} \quad (8.1.2)$$

Jegyzet alapján:

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{x} = -\mathbf{A} \mathbf{x} \quad (8.1.3)$$

A teljes megoldás az összes lehetséges sajátfrekvenciával vett exponenciális lineáris kombinációja a megfelelő sajátvektorral szorozva. A vizsgálandó mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} (k + K)/m & -K/m \\ -K/m & (k + K)/m \end{pmatrix} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} 1 + \alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 + \alpha \end{pmatrix} \quad (8.1.4)$$

ahol $\omega_0^2 = k/m$ és $\alpha = K/k$. A dimenziótlann mátrix sajátértékproblémája:

$$(1 + \alpha - \lambda)^2 + \alpha^2 = 0 \rightarrow 1 + \alpha - \lambda = \pm \alpha \quad (8.1.5)$$

Tehát

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 1 + 2\alpha \quad (8.1.6)$$

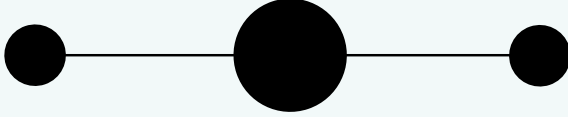
Sajátvektorok:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (8.1.7)$$

Az 1-es esetben a két test azonos irányba mozdul el, majd egymástól állandó távolságot tartva oszcillálnak. Ebben az esetben a középső rugó hossza nem változik, így a frekvencia nem függ K -tól. A 2-es esetben a két test ellentétes irányba tér ki, majd oszcillál, ekkor a természetesen lesz K függés.

K8.2

Adjuk meg a széndioxid molekula longitudinális rezgéseit kis kitérésekre!



Kis kitérések esetén automatikusan feltehetjük, hogy a potenciál kvadrati-
kus lesz. A koordinátáink így a rendre az egyensúlyi helyzetektől való eltérése
a részecskéknek (x_1 , x_2 és x_3). Kinetikus energia:

$$K = \frac{m}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{M}{2}\dot{x}_2^2 + \frac{m}{2}\dot{x}_3^2 \quad (8.1.8)$$

Potenciális energia:

$$V = \frac{k}{2}(x_2 - x_1)^2 + \frac{k}{2}(x_3 - x_2)^2 = \frac{k}{2}(x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3) \quad (8.1.9)$$

Kvadratikus alakok:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} \quad (8.1.10)$$

Ezekkel a Lagrange függvény:

$$L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}\mathbf{x}\mathbf{K}\mathbf{x} \rightarrow \ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x} = -\mathbf{A}\mathbf{x} \quad (8.1.11)$$

Az \mathbf{A} mátrix, és annak sajátérték problémája:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} k/m & -k/m & 0 \\ -k/M & 2k/M & -k/M \\ 0 & -k/m & k/m \end{pmatrix} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\alpha & 2\alpha & -\alpha \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.1.12)$$

ahol $\omega_0^2 = k/m$ és $\alpha = m/M$. Sajátértékegyenlet:

$$(1 - \lambda)^2(2\alpha - \lambda) - 2\alpha(1 - \lambda) = 0 \quad (8.1.13)$$

Leolvasható, hogy $\lambda_1 = 1$ az megoldás. A többi sajátértékre:

$$(1 - \lambda)(2\alpha - \lambda) - 2\alpha = -\lambda - 2\lambda\alpha + \lambda^2 = 0 \quad (8.1.14)$$

Tehát a másik két megoldás:

$$\lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = 1 + 2\alpha \quad (8.1.15)$$

Sajátvektorok:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8.1.16)$$

Tehát van egy zérus módus, ami egy eltolást jelent, ez a sajátvektorról is látszik, hiszen mindegyik test azonos irányban térül el, azonos nagyságban. Az 1-es sajátmódus esetén a középső test nem mozdul el, míg a két szélső azonos amplitúdóval ellentétes irányba, éppen ezért itt a frekvencia nem függ M -től. A 3-as esetben a két szélső mozog azonos irányba, míg a középső ezekkel ellentétes irányba úgy, hogy a ömégközpont nem mozdul el. Ekkora a frekvencia természetes módon függ M -től.

K8.3

Két azonos m tömegű golyó van egy k direkción erejű rugóval összekötve a síkon. Mik a sajátmódusok?

Lagrange függvény:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - \frac{k}{2} \left(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} - l_0 \right)^2 \quad (8.1.17)$$

Fejtsük sorba a potenciált az egyensúlyi helyzet körül, ami legyen $y_1 = y_2 = x_1 = 0$ és $x_2 = l_0$:

$$\partial_{x_1} V = k(\dots) \frac{(x_1 - x_2)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} \quad (8.1.18)$$

A második deriváltaknál csak azokat a részeket tartjuk meg, ami az egyensúlyi pontban nem nullák:

$$\partial_{x_1}^2 \rightarrow k \frac{(x_1 - x_2)^2}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \Big|_{0,L,0,0} = k \quad (8.1.19)$$

Észrevétel: bárhol, ahol y szerinti derivált is van zérust fog adni, hiszen az egyensúlyi helyen a $(y_1 - y_2)$ -vel arányos tagok nullát adnak. Emlékeztetőül egy skalárfüggvény sorfejlesztett alakja:

$$V(\mathbf{q}) = V(\mathbf{q}_0) + \nabla_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}_0) \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) + \frac{1}{2} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \mathbf{K}(\mathbf{q}_0) (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \dots \quad (8.1.20)$$

ahol $\mathbf{q} = (x_1, x_2, y_1, y_2)$. Így a mátrixunk végül:

$$\mathbf{K} = k \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.1.21)$$

Ennek a karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 = 0 \quad (8.1.22)$$

Így a sajátértékek: $2, 0, 0, 0$. Sajátvektorok:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.1.23)$$

A másik két sajátvektor megválasztásában nagy szabadságunk van, de válasszunk úgy, hogy fizikailag megvalósuló irányokat kapjunk. Így a négy vektor:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (8.1.24)$$

Gyakorló feladatok

F8.1 Négy azonos tömegű test van egy körgyűrűn. Mindegyik test mind-egyikkel össze van kötve egyenes mentén ugyanolyan (zérus nyugalmi hosszú) rugókkal. Milyen rezgési módusok jelenhetnek meg a rendszerben? Tegyük fel, hogy az elmozdulások kicsik!

Hamiltoni mechanika

Szükséges ismeretek és formulák

Hamilton-egyenletek

K9.1

Írjuk fel a Kepler-probléma Hamilton-egyenleteit!

Lagrange-függvény:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{\alpha}{r} \quad (9.1.1)$$

Kanonikus impulzusok:

$$p_r = m\dot{r} \quad p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} \quad (9.1.2)$$

Hamilton-függvény:

$$H = (p_i \dot{r}_i - L)|_{\dot{r}(p_r, p_\varphi), \dot{\varphi}(p_r, p_\varphi)} = \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{mr^2} - L \quad (9.1.3)$$

$$H = \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{mr^2} - \frac{m}{2} \left(\frac{p_r^2}{m^2} + r^2 \frac{p_\varphi^2}{m^2 r^4} \right) - \frac{\alpha}{r} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \quad (9.1.4)$$

Eddig két másodrendű egyenletet vártunk, most négy darab elsőrendűt:

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = \dot{r} \quad \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \dot{\varphi} \quad \frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\dot{p}_\varphi \quad \frac{\partial H}{\partial r} = -\dot{p}_r \quad (9.1.5)$$

Ezekből:

$$\frac{p_r}{m} = \dot{r} \quad \frac{p_\varphi}{mr^2} = \dot{\varphi} \quad \dot{p}_\varphi = 0 \quad \dot{p}_r = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - \frac{\alpha}{r^2} \quad (9.1.6)$$

Hamilton-Jacobi mechanika

K9.2

Adjuk meg egy szabadon eső test hely-idő függését a Hamilton-Jacobi egyenletek segítségével!

A Hamilton-Jacobi egyenlet:

$$H(\mathbf{q}, \nabla_q S, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad \mathbf{p} = \nabla_q S \quad (9.1.7)$$

ahol jelenleg

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgy \quad p = \frac{\partial S}{\partial y} \quad (9.1.8)$$

Így:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + mgy + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (9.1.9)$$

Mivel az eredeti Lagrange-függvény nem függ expliciten az időtől, az energia megmarad, tehát értékében a Hamilton-függvény is állandó. Így:

$$S = \tilde{S}(y) - Et \quad (9.1.10)$$

Erre:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial y} \right)^2 + mgy = E \quad (9.1.11)$$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial y} = \sqrt{2mE - 2m^2gy} = \sqrt{2gm} \sqrt{\frac{E}{mg} - y} \quad (9.1.12)$$

Ebből adódik:

$$\tilde{S} = -\sqrt{2gm} \frac{2}{3} \left(\frac{E}{mg} - y \right)^{3/2} + \alpha_0 \quad (9.1.13)$$

Integrációs konstansok: (α_0, E) . Így

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial E} = -\frac{2}{3} \sqrt{2gm} \frac{3}{2} \frac{1}{mg} \sqrt{\frac{E}{mg} - y} - t = -\sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{\frac{E}{mg} - y} - t \quad (9.1.14)$$

Így a koordináta:

$$y(t) = \frac{E}{mg} - \frac{g}{2} (t + \beta_1)^2 \quad (9.1.15)$$

És az impulzus:

$$p(t) = \frac{mg}{\sqrt{2}}(t + \beta_1) \quad (9.1.16)$$

K9.3

Adjuk meg egy ferdén elhajított test hely-idő függését Hamilton-Jacobi egyenletek segítségével!

Előzőhöz hasonlóan:

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + mgy \quad (9.1.17)$$

amiből:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial y} \right)^2 + mgy = E \quad (9.1.18)$$

Keressük a hatást az alábbi alakban:

$$\tilde{S} = X(x) + Y(y) \quad (9.1.19)$$

Így:

$$\frac{1}{2m} X'(x)^2 + \frac{1}{2m} Y'(y)^2 + mgy - E = 0 \quad (9.1.20)$$

Mivel x és y független koordináták, így a csak egyik vagy másiktól függő tagoknak konstansnak kell lenniük, ez az első α konstansunk:

$$\frac{1}{2m} X'(x)^2 = \alpha_1 \rightarrow X(x) = \sqrt{2m\alpha_1} x + c_x \quad (9.1.21)$$

$$\frac{1}{2m} Y'(y)^2 = E - mgy - \alpha_1 \quad (9.1.22)$$

amiből:

$$Y(y) = -\sqrt{2m^2g} \frac{2}{3} \left(\frac{E - \alpha_1}{mg} - y \right)^{3/2} + c_y \quad (9.1.23)$$

Tehát ($c_x + c_y = \alpha_0$ -val):

$$S = \sqrt{2m\alpha_1} x - \sqrt{2m^2g} \frac{2}{3} \left(\frac{E - \alpha_1}{mg} - y \right)^{3/2} + \alpha_0 - Et \quad (9.1.24)$$

És akkor a deriváltak:

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial E} = -t - \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{\frac{E - \alpha_1}{mg} - y} \quad (9.1.25)$$

$$\beta_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2m}{\alpha_1}}x + \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{\frac{E - \alpha_1}{mg}} - y \quad (9.1.26)$$

A felső egyenletből:

$$y(t) = \frac{E - \alpha_1}{mg} - \frac{g}{2}(t + \beta_2)^2 \quad (9.1.27)$$

Míg az alsóból:

$$x(t) = \sqrt{\frac{2\alpha_1}{m}}(t - \beta_2 - \beta_1) \quad (9.1.28)$$

Adiabatikus invariánsok

K9.4

Hogyan változik egy függőlegesen pattogó labda magassága, ha a gravitációs konstans lassan változik?

Ez egy egydimenziós mozgás, így egy invariáns várunk:

$$I = \oint p(y) dy \quad (9.1.29)$$

Egy y_0 magasságból leejtett testre:

$$y(t) = y_0 - \frac{g}{2} t^2 \quad (9.1.30)$$

amíg lefele halad. Impulzus:

$$p = m\dot{y} = -mgt \quad (9.1.31)$$

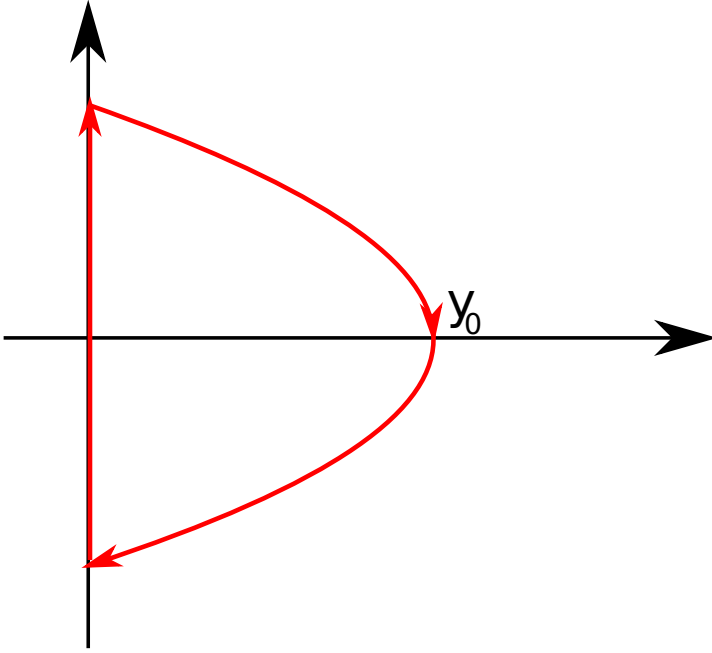
Így:

$$y = y_0 - \frac{p^2}{2m^2g} \quad p(y) = -\sqrt{2m^2g}\sqrt{y_0 - y} \quad (9.1.32)$$

Az ütközés után rész az erre teljesen szimmetrikus, tehát összességében a fázistérbeli trajektória:

$$p(y) = \mp\sqrt{2m^2g}\sqrt{y_0 - y} \quad (9.1.33)$$

ezeket egy függőleges vonal köti össze $y = 0$ -ban, ez az, ahol előjelet vált az impulzus.



36. ábra. Pattgó labda fázistérbén egy adott energiájú trajektória.

A kérdéses integrál így:

$$I = 2 \int_0^{y_0} \sqrt{2m^2 g} \sqrt{y_0 - y} dy = -2\sqrt{2m^2 g} \frac{2}{3} (y_0 - y)^{3/2} \Big|_0^{y_0} \quad (9.1.34)$$

$$I = \frac{4}{3} \sqrt{2m^2 g} y_0^{3/2} \rightarrow y_0 \sim g^{-1/3} \quad (9.1.35)$$

Nézzük meg az energiafüggést és a frekvenciákat:

$$E = mgy_0 \rightarrow E^{3/2} = m^{3/2} g^{3/2} y_0^{3/2} \quad (9.1.36)$$

Így

$$I(E) = \frac{4\sqrt{2}}{3} m \sqrt{g} m^{-3/2} g^{-3/2} E^{3/2} \quad (9.1.37)$$

$$T = \frac{\partial I}{\partial E} = 2 \sqrt{\frac{2E}{mg^2}} \quad (9.1.38)$$

K9.5

Hogyan változik egy függőlegesen dobozba zárt tömegpont energiája, ha a falak közti távolság lassan változik?

Itt a fázistér nagyon egyszerű, csak egy sima téglalap. Három szabadsági fokunk van a koordinátákban, így:

$$I_x = 2p_x a \quad I_y = 2p_y b \quad I_z = 2p_z c \quad (9.1.39)$$

Így az energia:

$$E = \frac{1}{2m} \left(\frac{I_x^2}{4a^2} + \frac{I_y^2}{4b^2} + \frac{I_z^2}{4c^2} \right) \quad (9.1.40)$$

Frekvenciák:

$$\nu_x = \frac{\partial E}{\partial I_x} = \frac{I_x}{4ma^2} = \frac{p_x}{m} \frac{1}{2a} \quad (9.1.41)$$

Gyakorló feladatok

F9.1 Egy körön helyezkedik el három különböző tömegű test, melyek különböző direkción erejű rugókkal vannak összekötve (zérus nyugalmi hosszokkal). Mik a rendszer sajátfrekvenciái? Hogyan fognak mozogni a testek, ha az első testnek adunk egy érintő irányú v_0 kezdősebességet?

F9.2 Oldjuk meg a Kepler-problémát Hamilton-Jacobi egyenletek segítségével!

F9.3 Vízszintes síkon R sugarú kör mentén zsinórra kötött m tömegű test mozog egyenletesen. Hogyan változik az test energiája, ha a kör középpontjában levő piciny lyukon keresztül a zsinór hosszát lassan csökkentjük?

F9.4 Egy vékony cső alján van egy D direkción erejű rugó, melynek nyújtatlan hossza l_0 . Erre ráejtünk egy testet $h > l_0$ magasságból, úgy, hogy $mg(h - l_0) < \frac{1}{2}Dl_0^2$. Hogyan változik a test maximális magassága a mozgása során, hogy a gravitációs gyorsulás lassan változik?

Merev testek

Szükséges ismeretek és formulák

Impulzusmomentum

K10.1

Egy m tömegű, L hosszúságú rudat a csuklós felfüggesztésénél ω szögsebességgel forgatunk. Mekkora a stacionárius állapotban a ϑ szög értéke? (amivel kitér az inga). Mekkora a csuklóban ébredő erő?

Mutasson a z tengely a szögsebesség irányába, majd bontsuk fel a szögsebességeket a rúdra merőleges (ω_2) és azzal párhuzamos (ω_1) komponensekre. Ennek megfelelően írjuk a rúd tehetetlenségi nyomatékait a tömegközéppontjára:

$$\Theta_1 = 0 \quad \Theta_2 = \frac{m}{3}L^2 \quad (10.1.1)$$

Impulzusmomentumok:

$$J_1 = 0 \quad J_2 = \Theta_2\omega_2 = \frac{m}{3}L^2\omega \sin \vartheta \quad (10.1.2)$$

Ahol ω a teljes szögsebesség nagysága. A teljes impulzusmomentum nagysága ugye éppen a J_2 . Maga a vektor egy körön megy körbe, tehát van véges időderiváltja, ami az impulzusmomentum vízszintes komponense és a szögsebesség nagyságának szorzata (mechanika analógia: $v = r\omega$):

$$|\dot{\mathbf{J}}| = J_2 \cos \vartheta |\omega| \quad (10.1.3)$$

Továbbá a perdülettétel értelmében:

$$\dot{\mathbf{J}} = \mathbf{M} \quad \rightarrow \quad |\dot{\mathbf{J}}| = \frac{L}{2}mg \sin \vartheta \quad (10.1.4)$$

Kettőt egyenlővé téve, és beírva J_2 alakját:

$$\frac{m}{3}L^2\omega \sin \vartheta \cos \vartheta = \frac{L}{2}mg \sin \vartheta \quad (10.1.5)$$

Így a stacionárius szög:

$$\cos \vartheta = \frac{3g}{2L\omega^2} \quad (10.1.6)$$

Kritikus szögsebesség, ami alatt a nullszög a stabil egyensúlyi helyzet:

$$\omega_{\text{krit}} = \sqrt{\frac{3g}{2L}} \quad (10.1.7)$$

A csuklóerőt bontsuk fel $x-y$ komponensekre. Az y irányban csak a gravitációnak kell ellentartani, tehát $F_x = mg$. Az x irányban a tömegpont körpályán tartásáért felelős centripetális erőt kell biztosítani:

$$F_x = \frac{L}{2} \sin \vartheta \omega^2 \quad (10.1.8)$$

Így felhasználva a korábban kapott eredményt a szögre adódik, hogy:

$$F_{\text{cs}} = \frac{mg}{2} \sqrt{\frac{7}{4} + \frac{L^2 \omega^4}{g^2}} \quad (10.1.9)$$

K10.2

Egy bolygó M tömeggel V sebességgel halad az űrben, miközben Ω szögsebességgel forog. A felszínre teljesen rugalmatlanul belesapódik \mathbf{v} sebességgel egy m tömegű meteor. Hogyan változik meg a szögsebessége a bolygónak?

Itt csak megmaradási tételket kell kihasználni. Tegyük fel, hogy a meteor egy \mathbf{r} pontba csapódott be. Ekkor az impulzus és impulzusmomentum megmaradás alapján:

$$M\mathbf{V} + m\mathbf{v} = M\mathbf{V}' + m(\mathbf{V}' + \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{r}) \quad (10.1.10)$$

$$\Theta\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \Theta\boldsymbol{\Omega}' + \mathbf{r} \times m(\mathbf{V}' + \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{r}) \quad (10.1.11)$$

Fejezzük ki az új sebességet:

$$\mathbf{V}' = \frac{M}{M+m}\mathbf{V} + \frac{m}{M+m}(\mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{r}) \quad (10.1.12)$$

Így:

$$\Theta\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \Theta\boldsymbol{\Omega}' + m\mathbf{r} \times \left(\frac{M}{M+m}\mathbf{V} + \frac{m}{M+m}(\mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{r} \right) \quad (10.1.13)$$

$$\Theta\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \Theta\boldsymbol{\Omega}' + \frac{Mm}{M+m}\mathbf{r} \times \mathbf{V} + \frac{m^2}{m+M}\mathbf{r} \times \mathbf{v} + \frac{Mm}{M+m}\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{r}) \quad (10.1.14)$$

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\Omega}' r^2 - \mathbf{r}(\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{r}) = r^2(1 - \mathbf{e}_r \circ \mathbf{e}_r)\boldsymbol{\Omega}' \quad (10.1.15)$$

Végül az új szögsebességre (felhasználva a gömb tehetetlenségi nyomatékát):

$$\boldsymbol{\Omega} = \left(1 + \frac{5}{2} \frac{m}{M+m} (1 - \mathbf{e}_r \circ \mathbf{e}_r) \right) \boldsymbol{\Omega}' + \frac{5}{2} \frac{m}{m+M} \frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{V} - \mathbf{v})}{R^2} \quad (10.1.16)$$

$$\boldsymbol{\Omega}' = \mathbf{A}\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{a} \quad (10.1.17)$$

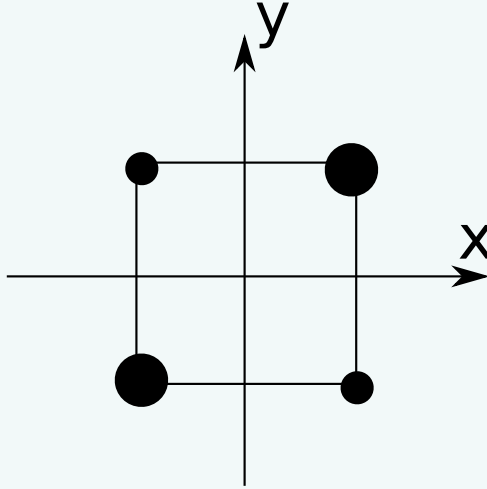
ahol

$$\mathbf{A}^{-1} = \left(1 + \frac{5}{2} \frac{m}{M+m} (1 - \mathbf{e}_r \circ \mathbf{e}_r) \right) \quad \mathbf{a} = \mathbf{A} \left(\frac{5}{2} \frac{m}{m+M} \frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{V} - \mathbf{v})}{R^2} \right) \quad (10.1.18)$$

Tehetetlenségi nyomaték tenzor

K10.3

Adott az alábbi elrendezés ($2a$ élhosszúságú négyzetem m és M tömegek):

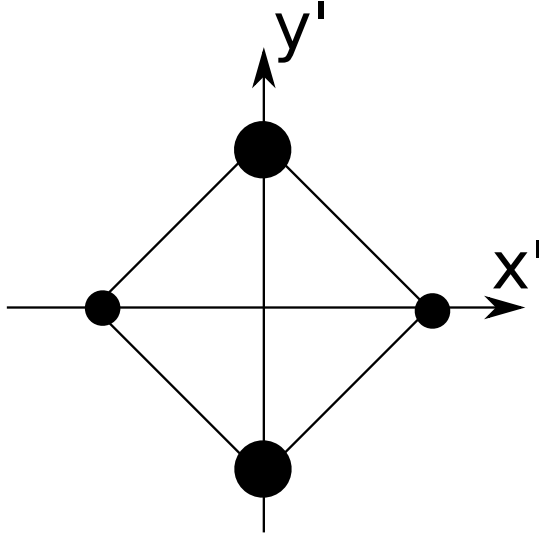


Határozzuk meg ennek a rendszernek a tehetetlenségi nyomatékát x - y - z koordináta-rendszerben, majd az xy síkban vett 45 fokosan elforgatott $x'-y'-z'$ koordináta-rendszerben is!

Pontrendszerre a tenzort az alábbi képlet mondja meg:

$$\Theta_{ij} = \sum_k m_k \left(\delta_{ij} \left(r_s^{(k)} r_s^{(k)} \right) - r_i^{(k)} r_j^{(k)} \right) \quad (10.1.19)$$

Könnyebbség kedvéért határozzuk meg először a tenzort a vesszős rendszerben.



Az y' és x' komponensek nagyságai mindenütt $\sqrt{2}a$, továbbá a testek a tengelyeken vannak. Így az összeg sokat egyszerűsödik:

$$\Theta_{x'x'} = \sum_k m_k (x'_k{}^2 + y'_k{}^2 + z'_k{}^2 - x'_k{}^2) = 2M(y'_M{}^2 + z'_M{}^2) = 4Ma^2 \quad (10.1.20)$$

$$\Theta_{y'y'} = 2M(r_m^2 - y_m^2) = 4ma^2 \quad (10.1.21)$$

$$\Theta_{z'z'} = \sum_k m_k (x'_k{}^2 + y'_k{}^2) = 2M(\sqrt{2}a)^2 + 2m(\sqrt{2}a)^2 = 4(M+m)a^2 \quad (10.1.22)$$

Egy offdiagonális elem:

$$\Theta_{x'y'} = - \sum_k m_k (x'_k y'_k) = 0 \quad (10.1.23)$$

Mivel a testek a tengelyeken vannak, ezért a többi elem azonosan zérus. Így a keresett tenzor:

$$\Theta' = \begin{pmatrix} 4Ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4(M+m)a^2 \end{pmatrix} \quad (10.1.24)$$

A két koordináta-rendszer között egy forgatás teremt kapcsolatot:

$$\mathbf{r} = \mathbf{U}\mathbf{r}' \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.1.25)$$

ami pont egy 45 fokos forgatásnak felel meg. A tenzor transzformációja:

$$\Theta = \mathbf{U}\Theta'\mathbf{U}^T = 2a^2 \begin{pmatrix} m+M & m-M & 0 \\ m-M & m+M & 0 \\ 0 & 0 & 2(m+M) \end{pmatrix} \quad (10.1.26)$$

K10.4

Számoljuk ki egy homogén henger tehetetlenségi nyomatékát!

Folytonos tömegeloszlású testre a tehetetlenségi nyomaték tenzor:

$$\Theta_{ij} = \int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) (\delta_{ij} r^2 - r_i r_j) \quad (10.1.27)$$

Álljon úgy a koordináta-rendszer, hogy a szimmetriatengely egybeesik z tengellyel, továbbá a súlypont legyen az origóban:

$$\Theta_{zz} = \int d^3\mathbf{r} \rho_0 (x^2 + y^2) \quad (10.1.28)$$

Váltunk át henger koordinátákra:

$$\Theta_{zz} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \rho_0 r^2 r dr d\varphi dz = 2\pi L \rho_0 \frac{R^4}{4} = \frac{M}{2} R^2 \quad (10.1.29)$$

A másik két diagonális elemre:

$$\Theta_{yy} = \Theta_{xx} = \int d^3\mathbf{r} \rho_0 (y^2 + z^2) \quad (10.1.30)$$

Polárkoordinátákban:

$$\Theta_{yy} = \Theta_{xx} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \rho_0 (r^2 \sin^2 \varphi + z^2) r d\varphi dr dz \quad (10.1.31)$$

Ebből:

$$\Theta_{yy} = \Theta_{xx} = \rho_0 \frac{R^4}{4} \pi L + \rho_0 \frac{R^2}{2} 2\pi \frac{L^3}{12} = \frac{M}{12} (L^2 + 3R^2) \quad (10.1.32)$$

Kereszttagokra:

$$\Theta_{xy} = \Theta_{yx} = - \int d^3\mathbf{r} \rho_0 xy = -\rho_0 \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} r^2 \cos \varphi \sin \varphi r dr d\varphi dz = 0 \quad (10.1.33)$$

Ez zérus a szög szerinti integrál miatt. Ugyanez lesz az xz és yz komponensekre hiszen hogy tiszta $\sin \varphi$ és $\cos \varphi$ függvények integrálja jelenik meg teljes periódusra. Így a tenzor:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \frac{M}{12} (L^2 + 3R^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{12} (L^2 + 3R^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{2} R^2 \end{pmatrix} \quad (10.1.34)$$

Pörgettyűk

K10.5

Vizsgáljuk egy szimmetrikus, súlyos pörgettyű azon eseteit, amikor nincs nutáció, tehát ϑ állandó.

Ismert a szimmetrikus súlyos pörgettyűre vonatkozó effektív mozgásegyenlet:

$$A\ddot{\vartheta} = Mgs \sin \vartheta - C\omega_t\omega_{pr} \sin \vartheta + (A - C)\omega_{pr}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta$$

ahol A és C a tehetetlenségi nyomatékok. Vizsgáljuk először a $C = 0$ (tehát a sima súlyos vékony rúd) Mivel stacionárius esetet vizsgálunk, ezért a $\ddot{\vartheta} = 0$ megoldásokat keressük. Mivel $C = 0$ ezért:

$$0 = Mgs + A\omega_{pr}^2 \cos \vartheta \quad (10.1.35)$$

Mivel homogén vékony rúdról van szó, ezért a tömegközéppont éppen a felező-pontjánál van. Továbbá a tehetetlenségi nyomatékokat a felfüggesztési ponton átmenő főtengelemekre írjuk fel. Így:

$$0 = Mg\frac{L}{2} + \frac{M}{3}L^2\omega_{pr}^2 \cos \vartheta \quad \rightarrow \quad \cos \vartheta = -\frac{3}{2}\frac{g}{L\omega_{pr}^2} \quad (10.1.36)$$

Második eset legyen a súlytalan vékony rúd végén egy M tömegű korong. Mikor lehet vízszintesen? Korongnak a tehetetlenségi nyomatékai:

$$C = \frac{MR^2}{2} \quad A = \frac{MR^2}{4} + ML^2 \quad (10.1.37)$$

Így stacionárius állapotra:

$$0 = MgL - \frac{MR^2}{2}\omega_t\omega_{pr} + \left(ML^2 - \frac{MR^2}{4}\right)\omega_{pr}^2 \cos \vartheta \quad (10.1.38)$$

$$\cos \vartheta = \frac{gL - \frac{R^2}{2}\omega_t\omega_{pr}}{\left(\frac{R^2}{4} - L^2\right)\omega_{pr}^2} \quad (10.1.39)$$

Akkor lesz ez vízszintesen, ha a $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, tehát:

$$gL = \frac{R^2}{2}\omega_t\omega_{pr} \quad (10.1.40)$$

Gyakorló feladatok

F10.1 a

1D rugalmas kontinuum

Szükséges ismeretek és formulák

Húrok rezgései

K11.1

Adottak az alábbi kezdőfeltételek egy L hosszúságú húrra:

$$\Psi(x, 0) = 0 \quad \dot{\Psi}(x, 0) = v_0 \sin\left(N\pi \frac{x}{L}\right)$$

Adjuk meg a teljes hely és időfüggését a kitérésnek!

Nincs más dolgunk, mint egy darab egyszerű integrál elvégzése:

$$\dot{a}_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L v_0 \sin\left(N\pi \frac{x}{L}\right) \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx = \frac{2v_0}{L} \frac{L}{2} \delta_{nN} = v_0 \delta_{nN} \quad (11.1.1)$$

Visszaírva ezt az általános megoldásba, az összegből csak egy tag marad:

$$\Psi(x, t) = \frac{v_0}{\omega_N} \sin(\omega_N t) \sin\left(N\pi \frac{x}{L}\right) \quad \omega_N = c \frac{\pi}{L} N \quad (11.1.2)$$

K11.2

A kezdetben zérus sebességgel rendelkező L hosszúságú húr kitérés függvénye kezdetben az alábbi:

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} \frac{h}{a}x, & \text{ha } x < a \\ \frac{h}{b}(L-x) & \text{ha } a < x < L \end{cases}$$

ahol $a + b = L$, tehát az a helyen kifeszítjük. Elengedés után hogyan fog rezegni a húr? Hol húzzuk ki, hogy a k -adik felhang ne szólaljon meg?

Itt csak kezdőhelyzet van, nincs kezdősebesség. Egy integrál elvégzése szükséges:

$$a_n(0) = \frac{2}{L} \left(\int_0^a \frac{h}{a} x \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx + \int_a^L \frac{h}{b}(L-x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right) \quad (11.1.3)$$

Ennek az elvégzése nem annyira nehéz, csak az alábbiakat kell felhasználni:

$$\int x \sin(cx) dx = \frac{1}{c^2} \sin(cx) - \frac{x}{c} \cos(cx) \quad L = a + b \quad (11.1.4)$$

Ezekkel:

$$a_n(0) = \frac{2h}{ab} \frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}a\right) \quad (11.1.5)$$

Így a teljes megoldás:

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2h}{ab} \frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}a\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}ct\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (11.1.6)$$

Az n . felhang akkor nem szólal meg, ha az ahhoz tartozó amplitúdó zérus:

$$a_n(0) = \frac{2h}{ab} \frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}a\right) = 0 \quad \rightarrow \quad a = \frac{Lk}{n} \quad k \leq n \quad (11.1.7)$$

Tehát a meghúzás helyére kaptunk egy feltételt. Fontos, hogy ilyenkor nem kizárólag csak az n . felhang nem szólal meg, hanem még sok másik!

K11.3

Egy kezdetben zérus kitérésű húr kezdősebesség függvénye az alábbi:

$$\dot{\Psi} = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < \frac{L}{2} - s \\ v_0 & \text{ha } \frac{L}{2} - s < x < \frac{L}{2} + s \\ 0, & \text{ha } x > \frac{L}{2} + s \end{cases}$$

Hogyan fog rezegni a húr? Mi a megoldás, ha s -sel tartunk nullához, de úgy, hogy $v_0 2s = p$ állandó?

Itt is csak egy darab integrált kell elvégezni (a másik itt is azonosan zérus):

$$\dot{a}_n(0) = \frac{2v_0}{L} \int_{\frac{L}{2}-s}^{\frac{L}{2}+s} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (11.1.8)$$

$$\frac{2v_0}{L} \int_{\frac{L}{2}-s}^{\frac{L}{2}+s} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = -\frac{2v_0}{n\pi} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{L}s\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{n\pi}{L}s\right) \right) \quad (11.1.9)$$

Felhasználva trigonometrikus azonosságokat:

$$\dot{a}_n(0) = \frac{4v_0}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{L}s\right) \quad (11.1.10)$$

Mi van, ha s -sel zérushoz tartunk? Írjuk vissza a megoldásunkba, hogy $v_0 = \frac{p}{2s}$:

$$\dot{a}_n(0) = \frac{2p}{n\pi} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{L}s\right)}{s} = \frac{2p}{L} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{L}s\right)}{\frac{n\pi}{L}s} \rightarrow \frac{2p}{L} \quad (11.1.11)$$

K11.4

Egy L hosszúságú húr közepére van rögzítve egy m tömegű kis test. Milyen frekvenciákon rezeghet a húr?

Ezt a problémát kezeljük úgy, hogy két külön húr van, ami kielégíti ugyanazt a hullámegyenletet, és az időt tartalmazó része azonos (azonos módusokat jelenhetnek meg bennük):

$$u_1(x, t) = \varphi_1(x)\Psi(t) \quad u_2(x, t) = \varphi_2(x)\Psi(t) \quad (11.1.12)$$

Adjuk meg már az elején úgy ezeket a függvényeket, hogy teljesítsék az alapvető határfeltételeket, tehát, hogy a húr két végének kitérése mindig zérus:

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \\ \varphi_1(x) &= a \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \\ \varphi_2(x) &= b \sin\left(\frac{\omega}{c}(x - L)\right) \end{aligned} \quad (11.1.13)$$

Természetes határfeltétel továbbá, hogy a csatlakozási ponton folytonos legyen a húr:

$$\varphi_1\left(\frac{L}{2}\right) = \varphi_2\left(\frac{L}{2}\right) \quad (11.1.14)$$

Az utolsó peremfeltétel onnan jön, hogy a testet a előfeszítési feszültségek különbségéből adódó erő gyorsítja:

$$\sigma_2|_{x=\frac{L}{2}} - \sigma_1|_{x=\frac{L}{2}} = F \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=\frac{L}{2}} \quad (11.1.15)$$

Hullámegyenlet:

$$dm = \rho dV = \rho A dx \quad (11.1.16)$$

$$\frac{F}{m} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) = \frac{F}{\rho A} \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \rightarrow c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (11.1.17)$$

Használjuk fel, hogy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 u \rightarrow F \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) = -\omega^2 m \varphi_1 \left(\frac{L}{2} \right) \quad (11.1.18)$$

Így ez a feltétel az alábbi alakot ölti:

$$\omega^2 m a \sin\left(\frac{\omega L}{c} \frac{L}{2}\right) = \frac{\omega F}{c} \left(a \cos\left(\frac{\omega L}{c} \frac{L}{2}\right) - b \cos\left(\frac{\omega L}{c} \frac{L}{2}\right) \right) \quad (11.1.19)$$

Folytonossági feltétel:

$$a \sin\left(\frac{\omega L}{c} \frac{L}{2}\right) + b \sin\left(\frac{\omega L}{c} \frac{L}{2}\right) = 0 \quad (11.1.20)$$

Így a megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\omega L}{c} \frac{L}{2}\right) & \sin\left(\frac{\omega L}{c} \frac{L}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\omega L}{c} \frac{L}{2}\right) - \frac{m\omega c}{F} \sin\left(\frac{\omega L}{c} \frac{L}{2}\right) & -\cos\left(\frac{\omega L}{c} \frac{L}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11.1.21)$$

Ennek a mátrixnak kell a determinánsának zérusnak lennie:

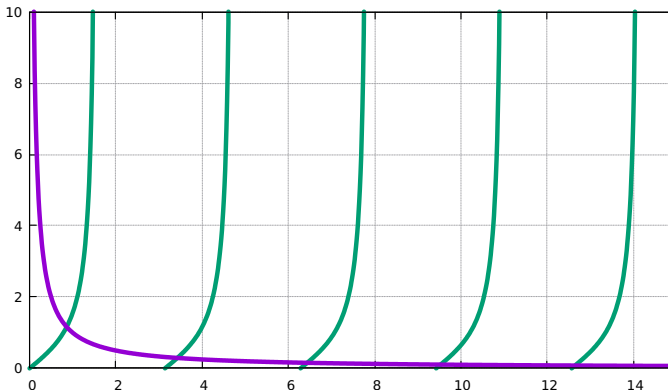
$$\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) \left(F - \frac{m\omega c}{2} \tan\left(\frac{\omega L}{2c}\right) \right) = 0 \quad (11.1.22)$$

Ez akkor zérus, ha legalább az egyik tagja a szorzatnak zérus, de úgy, hogy a másik véges. Éppen ezért, ahol a óvatosan kell ezt kezelni. A szinusz függvény zérus helyeinek a felénél a tangens divergál. Azon zérushelyek, ahol valóba zérus lesz a szorzat ($n\pi$ helyett):

$$\frac{\omega L}{c} = 2n\pi \quad \rightarrow \quad \omega_n = \frac{2n\pi c}{L} \quad (11.1.23)$$

Másik tagra pedig:

$$\tan\left(\frac{\omega L}{2c}\right) = \frac{2F}{m\omega c} \quad \rightarrow \quad \omega_m \quad (11.1.24)$$



Az ω_n -nek pont azok a módusok, amik a húr felénél zérus kitérést adnak, tehát nem számít, hogy van-e tömeg. A másik egyenlet transzcendens megoldási adják a további módusokat. Mi történik egyes határesetekben?

$$\begin{aligned} m \rightarrow \infty &\longrightarrow \omega_m = \frac{2m\pi c}{L} \\ m \rightarrow 0 &\longrightarrow \omega_m = \frac{m\pi c}{L} \end{aligned} \quad (11.1.25)$$

Tehát, ha végtelen a tömeg, akkor a két egyenlet frekvenciára ugyanazt mondja, a szokásos harmonikus módusokat közül azok jelennek meg, amiknek csomópontja van a tömeg helyén. Másik esetben visszkapjuk a teljes spektrumot, ami a két végén rögzített húrnál kapni várunk.

Vékony rudak hajlításai

K11.5

Határozzuk meg az egyik végén befogott, saját súlyánál fogva hajlott rúd alakját!

Statikus megoldást keresünk és nincs előszítés, így a megoldandó egyenlet:

$$0 = \rho g A - EI u_{xxxx} \quad (11.1.26)$$

Ennek általános megoldása természetesen egy polinom:

$$u_s = a + bx + cx^2 + dx^3 + \frac{x^4}{24} \frac{\rho g A}{EI} \quad (11.1.27)$$

Mivel a rúd az egyik végén be van fogva, ezért az erre vonatkozó peremfeltételek:

$$u_s(0) = u'_s(0) = 0 \quad (11.1.28)$$

míg a szabad végre:

$$u''_s(L) = u'''_s(L) = 0 \quad (11.1.29)$$

Ez négy feltétel a négy konstansra, amiket könnyen meg lehet kapni. A megoldás így:

$$u_s = \frac{\rho g A}{EI} \left(\frac{L^2}{4} x^2 - \frac{L}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 \right) \quad (11.1.30)$$

K11.6

Határozzuk meg a mindkét végén befogott, saját súlyánál fogva hajlott rúd alakját!

Hasonlóan az előző feladathoz az általános megoldás:

$$u_s(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \frac{x^4}{24} \frac{\rho g A}{EI} \quad (11.1.31)$$

A peremfeltételek a végekre:

$$u_s(0) = u'_s(0) = u_s(L) = u'_s(L) = 0 \quad (11.1.32)$$

Konstansok meghatározása után kapjuk, hogy:

$$u_s(x) = \frac{\rho g A}{24EI} (L^2 x^2 - 2Lx^3 + x^4) \quad (11.1.33)$$

K11.7

Mi az előfeszített húrnak a saját súlya alatt felvett alakja?

Húr esetén nincs hajlítási nyomaték, viszont most van előfeszítés. Így a megoldandó egyenlet:

$$0 = \rho g A + F u_{xx} \quad (11.1.34)$$

Ennek megoldása egy másodfajú polinom:

$$u_s(x) = a + bx - \rho g A \frac{x^2}{2} \quad (11.1.35)$$

A határfeltételek most azt írják elő, hogy mind a két végén legyen zérus a kitérés tehát:

$$u_s(0) = u_s(L) = 0 \quad (11.1.36)$$

Ezeket teljesítő megoldás:

$$u_s = \frac{\rho g A}{2} (Lx - x^2) \quad (11.1.37)$$

Vékony rudak nagy lehajlásai és rezgései

K11.8

Határozzuk meg az előfeszítetlen, mindkét végén befogott, súlytalan rúd alapfrekvenciáját!

Előfeszítés és gravitáció hiányában a megoldandó egyenlet:

$$u_{tt} = -\frac{EI}{\rho A} u_{xxxx} \quad (11.1.38)$$

Keressük a megoldást szeparált alakban:

$$u(t, x) = \varphi(x)\Psi(t) \quad (11.1.39)$$

Ezt visszaírva:

$$\frac{\ddot{\Psi}}{\Psi} = -\frac{EI}{\rho A} \frac{\varphi''''(x)}{\varphi} \quad (11.1.40)$$

Mivel a két oldalon más-más változó, ezért mind a két oldanak konstansnak kell lennie:

$$\frac{\ddot{\Psi}}{\Psi} = -\frac{EI}{\rho A} \frac{\varphi''''(x)}{\varphi} = -\omega^2 \quad (11.1.41)$$

Ebből látszik, hogy az időfüggés harmonikus. Helyfüggése:

$$\varphi''''(x) = \frac{\rho A}{EI} \omega^2 \varphi(x) = k^4 \varphi(x) \quad (11.1.42)$$

Ennek általános megoldása:

$$\varphi(x) = a \sin(kx) + b \cos(kx) + c \sinh(kx) + d \cosh(kx) \quad (11.1.43)$$

Mivel a rúd mind a két végén be van fogva, ezért mind a függvény, mind a deriváltja el kell tűnjön a határokon:

$$\varphi(0) = b + d = 0 \quad (11.1.44)$$

$$\varphi'(0) = k(a + c) = 0 \quad (11.1.45)$$

Tehát:

$$\varphi(x) = a (\sin(kx) - \sinh(kx)) + b (\cos(kx) - \cosh(kx)) \quad (11.1.46)$$

Feltételek a másik határon:

$$\varphi(L) = a(\sin(kL) - \sinh(kL)) + b(\cos(kL) - \cosh(kL)) = 0 \quad (11.1.47)$$

$$\varphi'(L) = ak(\cos(kL) - \cosh(kL)) - bk(\sin(kL) + \sinh(kL)) = 0 \quad (11.1.48)$$

A megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{pmatrix} \sin(kL) - \sinh(kL) & \cos(kL) - \cosh(kL) \\ \cos(kL) - \cosh(kL) & -\sin(kL) - \sinh(kL) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11.1.49)$$

Ennek akkor van nem triviális megoldása, ha a mátrix determinánsa zérus, tehát:

$$-(\sin^2(kL) - \sinh^2(kL)) - (\cos^2(kL) + \cosh^2(kL) - 2\cos(kL)\cosh(kL)) = 0 \quad (11.1.50)$$

Kihasználva a megfelelő azonosságokat:

$$\cos(kL)\cosh(kL) = 1 \quad k_n = \dots \quad (11.1.51)$$

Ennek tehát van végtelen sok diszkrét k_n megoldása, amik ennek a transzcendens egyenletnek a megoldásai. Ennek megfelelően a rezgése frekvenciái:

$$\frac{\rho A}{EI}\omega_n^2 = k_n^4 \quad \rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}k_n^2 \quad (11.1.52)$$

Innen azt is láthatjuk, hogy a diszperzió nem lineáris, a hangsebesség hullámszámfüggő. Az legalacsonyabb frekvenciához tartozó értékek:

$$k_0^2 L^2 \simeq 22.3726 \quad \rightarrow \quad \omega_0 \simeq 22.3726 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL}} \quad (11.1.53)$$

K11.9

Adjuk meg azt a kritikus erőt, ahol a mindkét végén befogott rúd kihajlik!

F erővel nyomott súlytalan rúd egyenlete:

$$\rho Au_{tt} = Fu_{xx} - EIu_{xxxx} \quad (11.1.54)$$

A diszperziós reláció:

$$-\rho A\omega^2 = -Fk^2 - EI k^4 \quad (11.1.55)$$

A rúd ott hajlik ki, ahol a frekvencia képzetessé válik, tehát ahol annak négyzete zérus lesz:

$$F = -EI k^2 \quad (11.1.56)$$

A negatív előjel azért van, mert az előfeszítés most igazából összenyomás. Kérdés, hogy mi az a legkisebb hullámszám, ami megjelenik a kihajlásnál. Mivel a zérus frekvenciához tartozó megoldást keressük, ezért a probléma most ekvivalens azzal, hogy a statikus megoldásokat keressük:

$$u_{xxxx} = \frac{F}{EI} u_{xx} = -k^2 u_{xx} \quad (11.1.57)$$

Ennek általános megoldása:

$$u = a + bx + c \sin(kx) + d \cos(kx) \quad (11.1.58)$$

Ehhez kell illeszteni a megfelelő peremfeltételeket:

$$u(0) = 0 \quad \rightarrow \quad a + d = 0$$

$$u'(0) = 0 \quad \rightarrow \quad b + kc = 0$$

$$u = a(1 - \cos(kx)) + b(\sin(kx) - kx) \quad (11.1.59)$$

A lehetséges k -kat a másik végén vett rögzítés szabja meg:

$$u(L) = 0 \quad \rightarrow \quad a(1 - \cos(kL)) + b(\sin(kL) - kL) = 0$$

$$u'(L) = 0 \quad \rightarrow \quad ak \sin(kL) + bk(\cos(kL) - 1) = 0 \quad (11.1.60)$$

Ennek csak akkor van nem triviális megoldása, ha az alábbi egyenlet teljesül (mátrix determinánsa zérus):

$$-k(\cos(kL) - 1)^2 - k \sin^2(kL) + k^2 L \sin(kL) = 0 \quad (11.1.61)$$

Egyszerűsítések után:

$$\cos(z) + \frac{z}{2} \sin(z) = 1 \quad z = kL \quad (11.1.62)$$

Ennek első zérustól különböző megoldása $z = 2\pi$, tehát:

$$k = \frac{2\pi}{L} \quad (11.1.63)$$

Ebből az is kiderül, hogy $b = 0$ tartozik ehhez. Ekkor

$$u = a \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi}{L} x \right) \right)$$
$$F_{\text{krit}} = -EI \frac{4\pi^2}{L^2} \quad (11.1.64)$$

K11.10

A nagy lehajlású, egyik végén befogott, másik végén F erővel merőlegesen húzott rudakra a lehajlást az alábbi formulák adják meg:

$$\begin{aligned}
 x(\vartheta) &= \sqrt{\frac{2EI}{F}} \left(\sqrt{\sin \vartheta_0} - \sqrt{\sin \vartheta_0 - \sin \vartheta} \right) \\
 y(\vartheta) &= \sqrt{\frac{EI}{2F}} \int_0^\vartheta \frac{\sin \vartheta'}{\sqrt{\sin \vartheta_0 - \sin \vartheta'}} d\vartheta' \quad (11.1.65)
 \end{aligned}$$

ahol ϑ az (x, y) pontbeli lehajlási szög x tengelytől. Nézzük meg, mit adnak a formulák kis kitérésre!

Először is végezzük el az integrált:

$$y(\vartheta \ll 1) = \sqrt{\frac{EI}{2F}} \int_0^\vartheta \frac{\vartheta'}{\sqrt{\vartheta_0 - \vartheta'}} d\vartheta' = \sqrt{\frac{EI}{2F}} \left[-\frac{2}{3} \sqrt{\vartheta_0 - \vartheta} (\vartheta + 2\vartheta_0) + \frac{2}{3} 2\sqrt{\vartheta_0} \vartheta_0 \right] \quad (11.1.66)$$

Az x -re vonatkozó egyenletből fejezzük ki a szöget:

$$\vartheta = \vartheta_0 - \left(\sqrt{\vartheta_0} - \sqrt{\frac{F}{2EI} x} \right)^2 \quad (11.1.67)$$

Ezt írjuk vissza y -ra vonatkozó egyenletbe! Néhány algebrai átalakítás után:

$$y(x) = \frac{\sqrt{\vartheta_0}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{F}{EI}} \left(x^2 - \frac{1}{3\sqrt{2}\sqrt{\vartheta_0}} \sqrt{\frac{F}{EI}} x^3 \right) \quad (11.1.68)$$

A határfeltétel szerint $x = L$ -ben a lehajlás ϑ_0 , ami éppen az $y(x)$ függvény deriváltja x szerint az L -ben:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=L} = \frac{\sqrt{\vartheta_0}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{F}{EI}} \left(2L - \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\vartheta_0}} \sqrt{\frac{F}{EI}} L^2 \right) = \vartheta_0 \quad (11.1.69)$$

Átalakítva:

$$\vartheta_0 - \sqrt{\frac{2F}{EI}} \sqrt{\vartheta_0} L + \frac{1}{2} \frac{FL^2}{EI} = \left(\sqrt{\vartheta_0} - \sqrt{\frac{F}{2EI}} L \right)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \sqrt{\vartheta_0} = \sqrt{\frac{F}{2EI}} L \quad (11.1.70)$$

Ezt visszaírva y -ba kapjuk:

$$y(x) = \frac{FL}{2EI} \left(x^2 - \frac{x^3}{3L} \right) \quad (11.1.71)$$

ami egészen pontosan megegyezik a kis kihajlásoknál kapott eredménnyel!

Gyakorló feladatok

F11.1 a

3D rugalmas kontinuum

Szükséges ismeretek és formulák

Deformációk

K12.1

Mutassuk meg, hogy definíció szerint kis elforgatásra a deformációtenzor azonosan zérus.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (12.1.1)$$

ahol

$$u_i = \varepsilon_{ipq} \Delta \varphi_p r_q \quad \partial_j u_i = \varepsilon_{ipq} \Delta \varphi_p \partial_j r_q = \varepsilon_{ipq} \Delta \varphi_p \delta_{jq} = \varepsilon_{ipj} \Delta \varphi_p \quad (12.1.2)$$

Így:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{ipj} - \varepsilon_{jpi}) \Delta \varphi_p = 0 \quad (12.1.3)$$

Tehát valóban azonosan zérus a deformációs tenzor.

K12.2

Fejezzük ki a C_{ijkl} tenzort a Lamé-állandókkal!

A rugalmas energia általánosan:

$$\Phi = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (12.1.4)$$

míg homogén izotróp közegre a Lamé-állandók segítségével:

$$\Phi = \frac{\lambda}{2} (\text{Tr} \varepsilon)^2 + \mu \text{Tr} \varepsilon^2 \quad (12.1.5)$$

Cél, hogy ezt felírjuk indexesen és olyan alakra hozzuk, mint az általános formulát:

$$\Phi = \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \left(\frac{\delta_{jk} \delta_{il} + \delta_{ik} \delta_{jl}}{2} \right) \quad (12.1.6)$$

A második tagban azért ilyen alakban írtuk át az indexeket, mert i és j indexekben szimmetrikus kell legyen a formula. Ebből leolvasható, hogy:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{jk} \delta_{il} + \delta_{ik} \delta_{jl}) \quad (12.1.7)$$

K12.3

Mutassuk meg, hogy a C_{ijkl} tenzornak milyen elemei lesznek függetlenek bizonyos szimmetriák esetén!

Először is írjuk fel a transzformációs szabályokat:

$$r'_i = O_{ij}r_j \quad \rightarrow \quad u'_i = O_{ij}u_j \quad (12.1.8)$$

Mivel a rugalmassági állandókat tartalmazó mennyiség tenzor, ezért az arra vonatkozó transzformációs szabály:

$$C'_{ijkl} = O_{pi}O_{qj}O_{rk}O_{sl}C_{pqrs} \quad (12.1.9)$$

Amennyiben az O transzformáció szimmetriája a rendszernek:

$$C_{ijkl} = O_{pi}O_{qj}O_{rk}O_{sl}C_{pqrs} \quad (12.1.10)$$

ami csökkenti a független komponensek számát. Vegyük példának a monoklint, aminek egy 180 fokos forgatási szimmetriája van:

$$O = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (12.1.11)$$

Mivel négyszer szerepel a transzformációban az O tenzor, ezért a negatív prefaktor nem számít, továbbá vegyük észre, hogy felösszegzés után csak $C'_{ijkl} = AC_{ijkl}$ jellegű eredmény marad, hiszen jelen esetben diagonális a transzformációs mátrix. Csak azon elemekben lesz érdekesség, aminek legalább egyik indexe 3. Például:

$$C_{1113} = -C_{1113} \quad \rightarrow \quad C_{1113} = 0 \quad (12.1.12)$$

Tulajdonképpen azon elemek lesznek nullák, amiben páratlan számú 3-as van az indexekben. Mik lehetnek ezek:

$$\begin{aligned} C_{ijjj} &\rightarrow C_{1333}, C_{2333}, C_{3111}, C_{3222} \\ C_{iijk} &\rightarrow C_{1123}, C_{2213} \\ C_{ijik} &\rightarrow C_{1213}, C_{2123} \end{aligned} \quad (12.1.13)$$

Ez nyolc darab független elem, ami mind zérus lesz, tehát 21 elemből marad 13.

K12.4

Vizsgáljuk egy rugalmas homogén henger kis szögű csavarását! Adjuk meg a deformációtenzort és magasság függvényében a síklapok elfordulási szögét!

Kis szög esetén az elmozdulásvektor:

$$\mathbf{u} = \varphi \times \mathbf{r} \quad \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi(z) \end{pmatrix} \quad (12.1.14)$$

Így az elmozdulásvektor és deformációs tenzor:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -\varphi(z)y \\ \varphi(z)x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (12.1.15)$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2}y\varphi'(z) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}x\varphi'(z) \\ -\frac{1}{2}y\varphi'(z) & \frac{1}{2}x\varphi'(z) & 0 \end{pmatrix} \quad (12.1.16)$$

Tudjuk, hogy a feszültség tenzort, hogyan kapjuk:

$$\sigma = \lambda \text{Tr} \varepsilon + 2\mu \varepsilon \quad \rightarrow \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -y\mu\varphi'(z) \\ 0 & 0 & x\mu\varphi'(z) \\ -y\mu\varphi'(z) & x\mu\varphi'(z) & 0 \end{pmatrix} \quad (12.1.17)$$

A rugalmas közeg mozgásegyenlete:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} + \nabla \sigma \quad (12.1.18)$$

Mivel nincsen külső erő és statikus megoldást keresünk, ezért csak a feszültségtenzor eltűnését követeljük meg. Határfeltétel pedig

$$\sigma_{ij} n_j = f_{\text{fel},i} \quad (12.1.19)$$

ahol f_{fel} a felületen ható erők, amik a paláston nullák, felső lapon véges (ezzel csavarjuk meg). Három egyenletben nagyon sok zérus tag van, ami megmarad:

$$-\mu y \varphi''(z) = 0 \quad \mu x \varphi''(z) = 0 \quad (12.1.20)$$

Ezek csak abban az esetben teljesülhetnek, a szög második deriváltja eltűnik, tehát:

$$\varphi(z) = az + b \quad (12.1.21)$$

A határfeltétel az, hogy legalul na csavarodjon a henger, felül pedig kis $\Delta\varphi$ szöggel csavarjuk, így:

$$\varphi(z) = \frac{\Delta\varphi}{l}z \quad (12.1.22)$$

ahol l a henger magassága. Így a feszültségtenzor:

$$\sigma = \frac{\Delta\varphi}{l}\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \quad (12.1.23)$$

A paláston a feszültség valóban, automatikusan eltűnik:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x}{R} \\ \frac{y}{R} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12.1.24)$$

Fedőlapon:

$$\frac{\Delta\varphi}{l}\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{\Delta\varphi}{l}\mu \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{f}_{\text{fel}} \quad (12.1.25)$$

Forgatónyomaték:

$$|d\mathbf{M}| = |\mathbf{r} \times (\mathbf{f}_{\text{fel}}dA)| = \frac{\mu\Delta\varphi}{l}r^22\pi r dr \quad (12.1.26)$$

Kiintegrálva egész felületre adódik:

$$M = \mu \frac{\pi R^4}{2l} \Delta\varphi \quad (12.1.27)$$

K12.5

Adjuk meg a saját gravitációs tere miatt deformálódó rugalmas gömb deformációs tenzorát vezető rendben!

Vezető rendű közelítésnél kiindulhatunk abból, hogy homogén sűrűségű a gömb (persze ez pont nem lesz igaz, hiszen éppen ezt számoljuk ki, hogy mennyire nem). Egy r sugárig a bezárt tömeg:

$$M(r) = \frac{4\pi}{3}\rho r^3 \quad (12.1.28)$$

Így a gravitációs gyorsulás:

$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2} = \frac{4\pi}{3}G\rho r \quad (12.1.29)$$

Az erősűrűség:

$$f_k = \rho g(r) \frac{x_k}{r} \quad (12.1.30)$$

Megoldandó egyenlet:

$$\partial_l \sigma_{lk} + f_k = 0 \quad (12.1.31)$$

Feszültségtenzor felírva a deformációs tenzonnal:

$$\sigma_{kl} = 2\mu\varepsilon_{kl} + \lambda\delta_{kl}\varepsilon_{ss} \quad (12.1.32)$$

Így a divergencia:

$$\partial_l \sigma_{lk} = 2\mu\partial_l \varepsilon_{lk} + \lambda\partial_k \varepsilon_{ss} \quad (12.1.33)$$

Felhasználva, hogy

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(\partial_k u_l + \partial_l u_k) \quad \rightarrow \quad \partial_l \varepsilon_{lk} = \frac{1}{2}\partial_l \partial_k u_l + \frac{1}{2}\partial_l^2 u_k \quad (12.1.34)$$

kapjuk:

$$\operatorname{div} \sigma = (\lambda + \mu)\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu\Delta \mathbf{u} \quad (12.1.35)$$

Továbbá használjuk fel az alábbi differenciál operátorok közötti azonosságot:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta \quad (12.1.36)$$

Szimmetria okok miatt az elmozdulástér csakis radiális lehet, tehát rotációmentes. Így az egyszerűsített egyenletünk:

$$\operatorname{div} \sigma = (\lambda + 2\mu)\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} \quad (12.1.37)$$

Felhasználva korábbi összefüggéseket:

$$\text{grad div } \mathbf{u} = -\frac{1}{\lambda + 2\mu} \mathbf{f} = \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{g(R)}{R} \mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}}{a^2} \quad (12.1.38)$$

Gömbi koordinátákban a divergencia:

$$\text{div } \mathbf{u} = \mathbf{u}' + \frac{2}{r} \mathbf{u} \quad (12.1.39)$$

Így (mivel elmozdulás is csak radiális lehet):

$$\left(u'_r + \frac{2}{r} u_r \right)' = \frac{r}{a^2} \rightarrow u'_r + \frac{2}{r} u_r = \frac{r^2}{2a^2} + 3b \quad (12.1.40)$$

Ez egy sima változó együtthatós lineáris inhomogén differenciálegyenlet, melyet a változók variálásának módszerével lehet megoldani. Homogén részre:

$$u'_r + \frac{2}{r} u_r = 0 \rightarrow u_r = \frac{A}{r^2} \quad (12.1.41)$$

Visszaírva ezt az eredeti egyenletbe (megengedve a konstansnak r függést):

$$-\frac{2A(r)}{r^3} + \frac{dA(r)}{dr} \frac{1}{r^2} + \frac{2A(r)}{r^3} = \frac{r^2}{2a^2} + 3b \rightarrow \frac{dA(r)}{dr} = \frac{r^4}{2a^2} + 3b^2 \quad (12.1.42)$$

$$A(r) = \frac{r^5}{10a^2} + br^3 + c \quad (12.1.43)$$

Végül az elmozdulások:

$$u_r(r) = \frac{r^3}{10a^2} + br + \frac{c}{r^2} \quad (12.1.44)$$

A harmadik tagnak el kell tűnnie, ha nem szeretnénk, hogy divergáljon az elmozdulás az origóban. Deformációs tenzor:

$$\varepsilon_{rr} = \partial_r u_r = \frac{3r^2}{10a^2} + b \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{u_r}{r} = \frac{r^2}{10a^2} + b \quad (12.1.45)$$

$$\text{Tr } \varepsilon = \frac{r^2}{2a^2} + 3b \quad (12.1.46)$$

$$\sigma_{rr} = 2\mu\varepsilon_{rr} + \lambda\text{Tr}\varepsilon = 2\mu \left(\frac{3r^2}{10a^2} + b \right) + \lambda \left(\frac{r^2}{2a^2} + 3b \right) = \frac{r^2}{a^2} \left(\frac{3\mu}{5} + \frac{\lambda}{2} \right) + b(2\mu + 3\lambda) \quad (12.1.47)$$

A felületen ennek el kell tűnnie:

$$\sigma_{rr}(R) = 0 \quad \rightarrow \quad b = -\frac{6\mu + 5\lambda}{2\mu + 3\lambda} \frac{R^2}{10a^2} \quad (12.1.48)$$

Végül:

$$u(r) = \frac{1}{10a^2} \left(r^3 - \frac{6\mu + 5\lambda}{2\mu + 3\lambda} R^2 r \right) \quad (12.1.49)$$

Sugár irányú nyúlás:

$$\varepsilon_{rr} = u'(r) = \frac{3}{10a^2} (r^2 - r_0^2) \quad r_0^2 = R^2 \frac{6\mu + 5\lambda}{6\mu + 9\lambda} \quad (12.1.50)$$

ahol r_0 az a sugár, ahol nem nyúlik az anyag.

Rugalmas hullámok és csillapítás

K12.6

Tekintsünk egy a élhosszúságú kocka alakú rugalmas testet, amely egy szintén a élhosszúságú kocka alakú merev üregben van, a lapok az üreg falához vannak ragasztva! Határozzuk meg a kocka rugalmas rezgéseinek sajátfrekvenciáit!

Homogén izotróp közegre vonatkozó mozgásegyenlet:

$$\rho u_{itt} = \mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) \partial_i (\partial_j u_j) \quad (12.1.51)$$

Mivel merev az üreg, a rugalmas közeg pedig ragasztva van a falhoz, így a határfeltételek azok lesznek, hogy a kitérés mind a három komponense legyen zérus a lapokon. Ez összesen 18 darab peremfeltételt jelent:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, 0) = u_1(x, y, a) = 0 \quad u_2(x, y, 0) = u_2(x, y, a) = 0 \quad u_3(x, y, 0) = u_3(x, y, a) = 0 \\ u_1(x, 0, z) = u_1(x, a, z) = 0 \quad u_2(x, 0, z) = u_2(x, a, z) = 0 \quad u_3(x, 0, z) = u_3(x, a, z) = 0 \\ u_1(0, y, z) = u_1(a, y, z) = 0 \quad u_2(0, y, z) = u_2(a, y, z) = 0 \quad u_3(0, y, z) = u_3(a, y, z) = 0 \end{aligned} \quad (12.1.52)$$

A peremfeltételeket automatikusan teljesítő függvények:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_n q_{jkl_1}(t) \sin\left(\frac{j\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{l\pi}{a}z\right) \\ u_2 &= \sum_n q_{jkl_2}(t) \sin\left(\frac{j\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{l\pi}{a}z\right) \\ u_3 &= \sum_n q_{jkl_3}(t) \sin\left(\frac{j\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{l\pi}{a}z\right) \end{aligned} \quad (12.1.53)$$

Ezeket visszaírva a mozgásegyenletben adódnak az alábbi összefüggések a q vektor komponenseire:

$$\rho q_{jkl_1}'' + \mu \frac{\pi^2}{a^2} (j^2 + k^2 + l^2) q_{jkl_1} + (\lambda + \mu) \frac{\pi^2}{a^2} j (q_{jkl_1} j + q_{jkl_2} k + q_{jkl_3} l) = 0$$

$$\rho q_{jkl_2}'' + \mu \frac{\pi^2}{a^2} (j^2 + k^2 + l^2) q_{jkl_2} + (\lambda + \mu) \frac{\pi^2}{a^2} l (q_{jkl_1} j + q_{jkl_2} k + q_{jkl_3} l) = 0$$

$$\rho q_{jkl_3} \ddot{q}_{jkl_3} + \mu \frac{\pi^2}{a^2} (j^2 + k^2 + l^2) q_{jkl_3} + (\lambda + \mu) \frac{\pi^2}{a^2} k (q_{jkl_1} j + q_{jkl_2} k + q_{jkl_3} l) = 0 \quad (12.1.54)$$

Harmonikus esetben a sajátfrekvenciák határozzák meg q időfüggését:

$$q_{jkl_i} \ddot{q}_{jkl_i} = -\omega_{jkl}^2 q_{jkl_i} \quad q = 1, 2, 3 \quad (12.1.55)$$

Ezt visszaírjuk a q komponenseire vonatkozó egyenletbe, akkor a frekvencia négyzetére egy homogén lineáris egyenletrendszer kapunk, melynek akkor megoldása, ha az egyenletrendszer mátrixának determinánsa zérus. Ez kijelöl egy harmadfokú egyenletet a frekvencia négyzetére, melynek megoldásai:

$$\begin{aligned} \omega_{jkl}^2 (1) &= \omega_{jkl}^2 (2) = \frac{\pi^2}{a^2} \frac{\mu}{\rho} (j^2 + k^2 + l^2) \\ \omega_{jkl}^2 (3) &= \frac{\pi^2}{a^2} \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} (j^2 + k^2 + l^2) \end{aligned} \quad (12.1.56)$$

Ezek pedig nem mások, mint a két tranzverz és az egy longitudinális módus.

K12.7

Milyen egyenlet írja le a mindkét végén befogott newtoni húr csillapított mozgását harmonikus közelítésben? Legyenek a kezdőfeltételek az alábbiak:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0 \\ u_t(x, 0) &= v_0 \delta \left(\frac{2x}{L} - 1 \right) \end{aligned} \quad (12.1.57)$$

A súrlódásmentes hullámeqyenlet:

$$\rho u_{tt} = \sigma u_{xx} \quad (12.1.58)$$

A disszipatív rugalmasságtanban tanultak alapján a súrlódásos tag hasonló lesz a hullámeqyenlet jobb oldalához, csak ott az első időderivált fog szerepelni:

$$\rho u_{tt} = \sigma u_{xx} + \sigma' u_{txx} \quad (12.1.59)$$

Keressük ennek megoldását síkhullám alakban:

$$u_k(x, t) \sim e^{i(kx - \omega t)} \quad (12.1.60)$$

Ez valóban megoldás, ha teljesül az alábbi:

$$\rho \omega^2 = -\sigma k^2 + i\omega k^2 \sigma' \quad (12.1.61)$$

Ebből diszperziós reláció:

$$\omega = -i\frac{\sigma'}{2\rho}k^2 \pm \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}k^2 - \frac{\sigma'^2}{4\rho^2}k^4} = -i\omega' \pm \sqrt{\omega_0^2 - \omega'^2} = -i\omega' \pm \omega^s \quad (12.1.62)$$

Mivel mindenhol k^2 szerepel, ezért megoldás természetesen $\pm k$. Így az összes lehetséges független megoldást összeadva kapjuk az általános megoldást:

$$u_k(x, t) = [(A_k e^{ikx} + B_k e^{-ikx}) e^{-i\omega_s t} + (C_k e^{ikx} + D_k e^{-ikx}) e^{i\omega_s t}] e^{-\omega' t} \quad (12.1.63)$$

Valóban, mivel második hely szerinti, és második idő szerinti deriváltat tartalmaz az egyenlet, négy független függvényt várunk megoldásnak (általános k függő együttthatókkal). Első peremfeltételünk, hogy az egyik végén a húr rögzített, így zérus a kitérése. Ezekből jön, hogy $A_k = -B_k$, illetve $C_k = -D_k$. Így:

$$u_k(x, t) = [A_k (e^{ikx} - e^{-ikx}) e^{-i\omega_s t} + C_k (e^{ikx} - e^{-ikx}) e^{i\omega_s t}] \quad (12.1.64)$$

Konstansokat egybeolvasztva:

$$u_k(x, t) = (a_k e^{-i\omega_s t} + b_k e^{i\omega_s t}) \sin(kx) e^{-\omega' t} \quad (12.1.65)$$

A k index jelöli, hogy ez egy módusra vonatkozik. A teljes megoldás az összes módus integrálja k szerint. A korábban látottak alapján, ahhoz, hogy a másik végén is zérus legyen a kitérés, az alábbiak kell teljesülnie:

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (12.1.66)$$

Innentől kezdve mindegyik típusú frekvencia diszkrét, n indexszel ellátott mennyiség, továbbá az általános megoldása az ezekre a módusokra való felösszegezés lesz (lásd. korábbi példák). A feladat szerint a kezdőkitérés zérus:

$$u(x, 0) = \sum_n (a_n + b_n) \sin(k_n x) = 0 \quad \rightarrow \quad a_n = -b_n \quad (12.1.67)$$

Konstansokat megint összevonva:

$$u(x, t) = \sum_n A_n \sin(k_n x) \sin(\omega_{s_n} t) e^{-\omega'_n t} \quad (12.1.68)$$

Utolsó kezdőfeltétel:

$$u_t(x, 0) = \sum_n A_n \sin(k_n x) \omega_{s_n} = v_0 \delta\left(\frac{2x}{L} - 1\right) \quad (12.1.69)$$

Ebből a keresett együttható:

$$\omega_{sn} A_n = \frac{2}{L} \int_0^L v_0 \delta \left(\frac{2x}{L} - 1 \right) \sin(k_n x) = v_0 \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \quad (12.1.70)$$

A szinusz függvény $\frac{n\pi}{2}$ helyeken lehet zérus, illetve ± 1 . Ha n páros, akkor a szinusz zérus. Így:

$$\begin{aligned} A_{2n} &= 0 \\ \omega_{s2n+1} A_{2n+1} &= v_0 (-1)^n \end{aligned} \quad (12.1.71)$$

Így a végső eredmény:

$$u(x, t) = \sum_n \frac{v_0}{\omega_{sn}} (-1)^n \sin(k_n x) \sin(\omega_{sn} t) e^{-\omega'_n t} \quad (12.1.72)$$

ahol

$$\begin{aligned} \omega_{sn} &= \omega_{0n} \sqrt{1 - \frac{\omega'^2_n}{\omega_{0n}^2}} \\ \omega'_n &= \frac{\sigma'}{2\rho} k_n^2 \\ k_n &= \frac{n\pi}{L} \end{aligned} \quad (12.1.73)$$

Ebből tisztán látszik, hogy a magasabb felharmonikusok négyzetesen gyorsabban csengenek le, végén csak alapl módus marad. Egy másik lehetséges út, hogy már alaplból egy olyan sor alakjában keressük a megoldást, ami automatikusan teljesíti a peremfeltételeket:

$$u(x, t) = \sum_n a_n(t) \sin(k_n x) \quad k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (12.1.74)$$

Ezt visszaírva az eredeti differenciálegyenletbe kapunk egy közönséges differenciálegyenletet $a_n(t)$ együtthatókra, mely a csillapított oszcillátorral lesz ekvivalens.

Gyakorló feladatok

F12.1 a

Hidrodinamika

Szükséges ismeretek és formulák

Tökéletes folyadékok

2D áramlások

K13.1

Áramoljon egy sűrűségmentes folyadék két dimenzióban $y > 0$ félsíkon, úgy, hogy végtelenben a sebessége $(v_0, 0)$! Lássuk be, hogy ha beteszünk egy R sugarú félkör akadályt az x tengelyre, a sebességpotenciál:

$$\Phi = v_0 \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \varphi \quad (13.1.1)$$

Mi az ehhez tartozó áramlási függvény? Legyen a tárgyalt félkör egy hangár, aminek legyen egy kis ajtaja az alján nyitva. Mekkora ekkor a hangárra ható erő?

Vizsgáljuk meg, hogy Φ kielégíti-e síkbeli Laplace-egyenletet:

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = \left(2v_0 \frac{R^2}{r^3} + \frac{v_0}{r} - v_0 \frac{R^2}{r^3} \right) \cos \varphi - v_0 \left(\frac{1}{r} + \frac{R^2}{r^3} \right) \cos \varphi = 0 \quad (13.1.2)$$

Továbbá a hangár felületén a sebességek:

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = v_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \varphi$$

$$v_\varphi(r = R, \varphi) = \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi(R, \varphi)}{\partial \varphi} = -2v_0 \sin \varphi \quad (13.1.3)$$

A radiális komponens eltűnik a felületen! Tehát ez megfelelő sebességpotenciál. Áramlásfüggvényre igaznak kell lennie, hogy ugyanannak a komplex függvénynek a képzetes része, mint aminek ez a valós része. Könnyen látható, hogy maga a függvény:

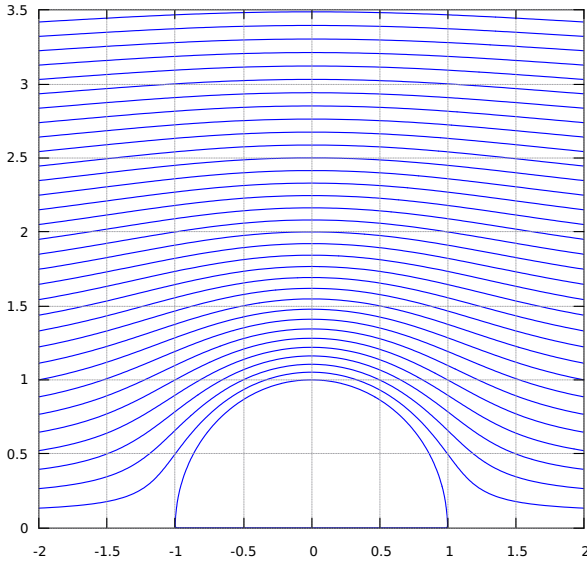
$$f(z) = v_0 \left(z + \frac{R^2}{z} \right) = v_0 \left(r e^{i\varphi} + \frac{R^2}{r e^{i\varphi}} \right) = v_0 \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \varphi + i v_0 \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \varphi \quad (13.1.4)$$

Erre igaz, hogy

$$\operatorname{Re}(f(z)) = \Phi = v_0 \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \varphi \quad (13.1.5)$$

Így az áramlásfüggvény:

$$\operatorname{Im}(f(z)) = \Psi = v_0 \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \varphi \quad (13.1.6)$$



Az eredő erőhöz szükség van arra, hogy mekkora a nyomás a hangár felszínén. Bernoulli-egyenlet alapján (feltéve, hogy a nyitott ajtó miatt belül konstans p_0 a nyomás):

$$p(\varphi) = p_0 - \rho \frac{v^2}{2} \quad (13.1.7)$$

A sebesség pedig:

$$v_\varphi(r = R, \varphi) = \frac{1}{R} \frac{\Phi(R, \varphi)}{\partial \varphi} = -2v_0 \sin \varphi \quad (13.1.8)$$

Így a nyomás a szög függvényében:

$$p(\varphi) = p_0 - 2\rho v_0^2 \sin^2 \varphi \quad (13.1.9)$$

Szimmetriai okok miatt az erő függőleges irányú, nagysága:

$$f = \int_0^\pi (p_0 - p(\varphi)) \sin \varphi R d\varphi = \frac{8}{3} R \rho v_0^2 \quad (13.1.10)$$

Itt (mivel két dimenzióról van szó) $[f] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

K13.2

Milyen áramlást ír le az alábbi komplex függvény?

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z \quad (13.1.11)$$

A kapottak alapján hogyan írunk le egy dipól terét? Ez után határozzuk meg egy homogén áramlásba helyezett síkbeli dipól áramlási terét! Az eredmény felhasználásával írjuk le, hogyan áramlik a folyadék egy R sugarú henger körül, ha attól nagyon messze homogén az áramlás!

Nézzük meg a valós és képzetes részeket:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f(z) &= \Psi = \frac{Q}{2\pi} \varphi \\ \operatorname{Re} f(z) &= \Phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r \end{aligned} \quad (13.1.12)$$

ahol $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, illetve $\tan \varphi = \frac{y}{x}$. Ezek körök, illetve egyenesek mentén konstansok, tehát ez megfelel egy forrásnak, melynek erőssége éppen Q . Egy forrás és egy nyelő egymás mellett közel:

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z - \frac{Q}{2\pi} \ln(z - \varepsilon) \quad (13.1.13)$$

Közelítsük ezeket egymáshoz a végtelenségig úgy, hogy $Q\varepsilon = d$ állandó. Ekkor:

$$f(z) = \frac{d}{2\pi} \left(\frac{\ln z - \ln(z - \varepsilon)}{\varepsilon} \right) \rightarrow \frac{d}{2\pi} \frac{1}{z} \quad (13.1.14)$$

Tehát egy áramlásba helyezett dipól sebességterét az alábbi függvénnyel írhatjuk le:

$$f(z) = v_0 z + \frac{d}{2\pi} \frac{1}{z} \quad (13.1.15)$$

Végezzük el az alábbi helyettesítést: $\frac{d}{2\pi} = v_0 R^2$. Ekkor pontosan azt a függvényt kapjuk, amik a félkör alakú akadálynál kaptunk. Természetesen a szimmetriák miatt, ha megengedjük, hogy a teljes síkon áramoljon a folyadék, akkor ez valójában egy kör alakú akadály problémáját írja le.

K13.3

Írjuk le az áramlási teret egy élgát körül!

Keresnünk kell egy olyan leképezést, ami a valós tengely átviszi egy gát alakú vonalba. A gyökfüggvényről belátható, hogy derékszöget csinál! Ennek a derékszögnek kell először a vízszintes tengelyét eltolni. Ehhez megfelelő:

$$F(w) \sim \sqrt{w(w-1)} \quad (13.1.16)$$

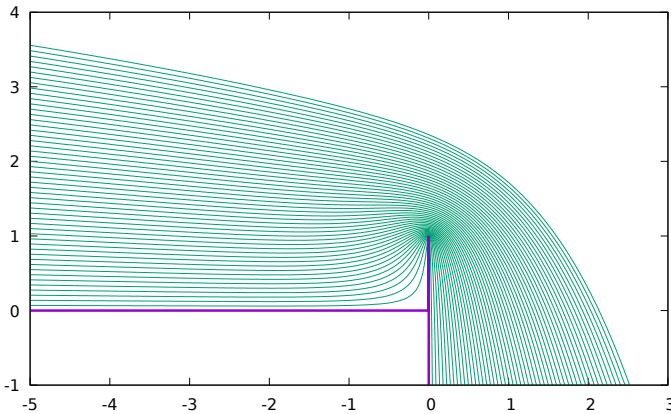
Ahhoz, hogy ez egy függőleges gát legyen:

$$F(w) = -i\sqrt{w(w-1)} \quad (13.1.17)$$

Ennek az inverze lenne a sebességteret leíró $f(z)$ függvény. Mivel ez nehéz, ezért az áramvonalakat paraméteresen kaphatjuk meg:

$$F(w) = F(w = u + iv)|_{v=\text{const}} = z_v = (x + iy)_v \quad (13.1.18)$$

Mіндеgyik v -re ez egy áramvonal, $v = 0$ -ra maga a gát alakja.



37. ábra. Egy gáton átbukó közeg áramvonalai

K13.4

Mutassuk meg, hogy egy végtelen mély tartályból a $\sin z$ függvény a valós tengelyre képez!

Tehát

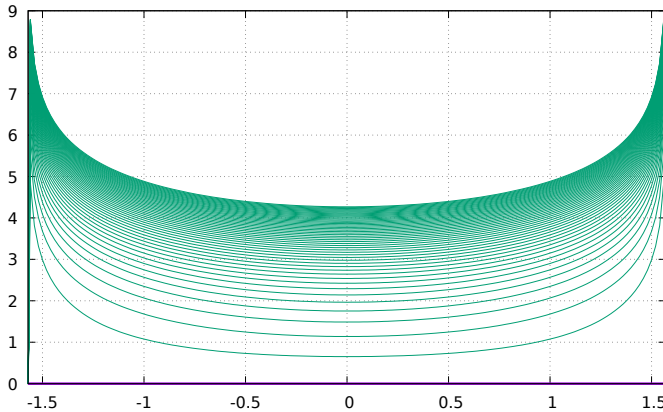
$$f(z) = \sin z \quad (13.1.19)$$

Míg a tartály alakja: $\pm \frac{\pi}{2}$ -ben pozitív képzetes számok, $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tartományon valós tengely. Hova képezési a két függőleges falat?

$$\sin\left(\pm \frac{\pi}{2} + iw\right) = \sin\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) \cos(iw) + \cos\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) \sin(iw) = \pm \cosh(w) \quad (13.1.20)$$

Tehát, $w = [0, \infty[$ tartományhoz tartozik a valós tengelyen a $] \infty, -1]$ és $[1, \infty[$ tartomány. Kettő között a szinusz pedig éppen -1 és 1 közé képez! Ennek megfelelően az áramvonalak egy ilyen tartályban:

$$\Psi = \text{Im} \sin(z) = \cos(x) \sinh(y) = \text{const} \quad (13.1.21)$$



38. ábra. Tartályon átfolyó közeg áramvonalai

Súrlódó folyadékok

Gyakorló feladatok

F13.1 a